FUNDAMENTOS GNOSEOLÓGICOS DE LA MATEMÁTICA

Conferencia en la sección matemática de la XLVI. Asamblea de filólogos y educadores alemanes de Estrasburgo i.e.[1]

Paul Natorp
Profesor titular de Filosofía en la Universidad de Marburgo

Pelegrin, Laura (CONICET-UBA-UDP)
Natorp, Paul: „Die erkenntnistheoretischen Grundlagen der Mathematik", *Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaftene*, Verlag von Otto Salle, Berlin, 1902/1, pp. 2-7.

[2] No tendría el valor, como no especialista, de recurrir a los matemáticos si no creyera ver razones objetivas por las que la lógica, la crítica del conocimiento, tiene que buscar el contacto con la matemática; no para enseñarles, sino para aprender de ustedes, para ser más precisos, para solicitar su cooperación en algunas de sus tareas más difíciles, que no se pueden abordar sin la ayuda de la matemática. No estoy pensando tanto con esto en una rama particular de nuestra ciencia, que, después de haber estado mucho tiempo petrificada en la tradición aristotélica, ha cobrado una nueva vida mediante el tratamiento matemático: la silogística, sino que estoy pensando en la tendencia generalizada de la matemática moderna a desarrollarse a través de un diseño puramente lógico, de modo que la referencia a la "intuición" se vuelve cada vez más innecesaria. La consecuencia de este esfuerzo debe conducir a no estar satisfechos con proceder lógicamente en matemática en general, como en cualquier ciencia, es decir, evitando la contradicción y demostrando lo que se afirma, sino que uno se propone la tarea más amplia de no admitir como supuesto nada que pueda derivarse de supuestos más fundamentales, es decir, que aún no sea absolutamente simple. Sin embargo, la pregunta por los supuestos últimos de una ciencia tan fundamental, como la matemática, conduce directamente al corazón de la filosofía como crítica del conocimiento. Ahora bien, puede entenderse que los pioneros de la ciencia, los descubridores y conquistadores de nuevas provincias del conocimiento matemático, quieran estar lo menos restringidos posible en la elección de sus supuestos; y lo están si se les permite tener todos los supuestos que no impliquen una contradicción interna. Sin embargo, además de la tarea de desarrollar las consecuencias a partir de supuestos dados, existe en todo caso la

1 Véase pp.11ss.

otra tarea, de retroceder a los últimos fundamentos alcanzables. Sobre todo, el profesor de matemática debería comprender esta tarea, ya que enseñar significa construir la verdad científica en la mente del alumno desde el principio; significa, si es posible, desarrollar los primeros supuestos absolutamente fundamentales. Sin embargo, incluso desde un punto de vista puramente objetivo, no se puede evitar la cuestión de los supuestos últimos. Lo compuesto se construye a partir de lo simple. Si se ha demostrado que un supuesto es más simple, entonces ya no está en nuestra elección poner ese supuesto como fundamento o el menos simple; simplemente, se establece como fundamento, y la teoría que establece algo diferente como fundamento es ilógica. Además, es innecesario apoyar esta exigencia en la base psicológica o biológica de la economía del pensamiento. En cualquier caso, al final de cuentas, prevalecerá la verdad del asunto, por lo que cualquier procedimiento que no se corresponda con la verdad del asunto es ciertamente también un vano desperdicio de energías. Pero si es así, entonces la fundamentación económica es completamente innecesaria; es suficiente atenerse simplemente a la cuestión.

Mi propósito ahora es informarles sobre algunos intentos en la dirección recién mencionada, como dije, no con la intención de enseñarles nada particularmente nuevo, sino más bien de aprender de su crítica, en cualquier caso, de estimular su interés en esta área de cuestiones. Se trata de los últimos fundamentos comunes de la aritmética y la geometría, cuya revelación significaría nada menos que una deducción puramente lógica tanto del espacio como del tiempo. Las investigaciones pertinentes se exponen en dos tratados, uno con motivo del Congreso Filosófico Internacional en la Exposición Universal de París, por lo tanto, publicado en francés: "Número, tiempo, y espacio"[2]; el otro, "Sobre los fundamentos lógicos de la matemática moderna" en el "Archiv für systematische Philosophie"[3]. Sin embargo, adoptaré aquí un enfoque ligeramente diferente, ya que creo que este nuevo enfoque hace que la prueba sea más rigurosa desde el punto de vista lógico, aunque no conduce a ningún resultado diferente.

Procedí allí de modo tal que primero derivé las leyes del número de los principios fundamentales de la "síntesis cuantitativo – cualitativa", es decir, de los dos procesos de pensamiento más fundamentales e inseparables a través de los cuales, por un lado, creamos conceptualmente una multiplicidad como tal, por otra parte, <creamos> esa unidad de una multiplicidad que constituye un contenido de pensamiento. Resultó que el tiempo, en sus propiedades puramente matemáticas, sin tener en cuenta sus determinaciones existenciales (como que dos tiempos se excluyen mutuamente en la existencia, si uno está dado, el otro no lo está en la existencia, etc.), coincide completamente con las propiedades de la serie numérica continua, homogénea unidimensional. Además, si nuevamente se ignoran las propiedades existenciales del espacio (por ejemplo, que las partes del espacio se condicio-

2 En : *Bibliotheque du congres international de philosophie*. Vol. I. (Paris, A. Colin, 1900) p. 342-389.

3 t. VII, 1901, pp. 177-209, y 372-384.

nan y se dan en la existencia, que coexisten), ambos coinciden también con la estructura fundamental del espacio, la línea recta. Sólo quedaba por preguntar si la única característica distintiva restante del espacio, la multidimensionalidad, y si acaso también una ley para las dimensiones del espacio podría derivarse sobre la misma base, a saber, la del número puro. Aquí me ayudó, por un lado, el concepto de número complejo ordinario, especialmente en la extensión al concepto de cuaternión de Hamilton, y por otro lado, el álgebra extensional de Grassmann. Creí que había una conexión esencial entre los dos y, al mismo tiempo, que había encontrado el fundamento que faltaba para la ley de las dimensiones espaciales.

Creo ahora, como dije, que el resultado se mantendrá; por otro lado, en este momento considero apropiado abordar la investigación de manera un tanto diferente y, de hecho, más radical: no hablar inicialmente ni del número ni del espacio, sino de posiciones (posiciones del pensamiento) directamente, y luego pasar a una serie de posiciones que deben construirse de acuerdo con determinadas leyes y finalmente concluir en un sistema. Luego, deberá quedar claro que las propiedades fundamentales y las leyes, por un lado, de los números, y por otro lado, del tiempo y del espacio, están dadas en esto. Intentaré esbozar muy brevemente este nuevo curso de mi argumento; es cierto que a riesgo de que la prueba, en aras de la brevedad necesaria, no esté completa en todos los sentidos. Sin embargo, sobre la base de los dos tratados citados, será posible completar en su mayoría lo que falta.

Parece muy natural partir de la simple posición *absoluta* (en el número: la unidad); sólo entonces proceder a la posición del otro en relación con el uno, como la posición relativa más simple; y luego continuar construyendo sobre estos fundamentos iniciales. Sin embargo, surgen dificultades. Entonces, parece que el cero y el número negativo no pueden derivarse en un desarrollo lógico completamente homogéneo, y las dificultades aumentan cuando se intenta avanzar hacia el imaginario y el irracional. Pero el concepto fundamental verdaderamente último del pensamiento matemático, y de todo pensamiento estricto en general, es más bien la relación. Es una ilusión pensar que uno pueda tener los términos por adelantado para luego hacer surgir la relación de su combinación. Ya Platón preguntó con razón: ¿No eran dos los dos antes de que se los juntara? La matemática no tiene que hacer nada, sólo tiene que contemplar y, en última instancia, nada más que relaciones. Los *relata* sólo son establecidos por la relación como sus términos. Si se parte de la posición absoluta, entonces, surge inmediatamente la dificultad, con respecto al número, de qué es lo fundamental, el cero o el uno. No hay ningún sentido sostenible para el cero sin el uno; indica el punto de partida, el último punto de referencia de la posición numérica, pero un punto de partida no se puede pensar sin lo que de él emana, un punto de referencia sin algo a lo que se refiere. Si se establece el uno primero, sin querer incluir la relación con el cero en él, entonces el cero y el número relativo sólo se pueden alcanzar mediante una definición arbitraria, no en un desarrollo lógico homogéneo. Por lo tanto, más bien, deberíamos partir de la simple posición relativa, de la posición de la simple relación, en la expresión numérica: 1 a 0; donde 0 significa el último punto de referencia, 1 lo primero establecido con respecto al cero. La característica de la "simplicidad" de esta última relación fundamental, en la que deben basarse todas las demás relaciones que se deben considerar en matemática, quiere decir: que el contenido de lo que en ella se piensa está determinado exhaustivamente y en estricta identidad únicamente por los elementos especificados, el uno y el cero, sin necesidad de añadir ningún otro elemento determinante que venga desde fuera. Para nuestro procedimiento estrictamente genético, debe ser evidente la exclusión de otras determinaciones, pero hago hincapié en esto para enfatizar que procedemos de forma estrictamente genética, constructiva, no presuponemos, como se dice, una multiplicidad "dada" u otra cosa similar para sólo luego conceptualizarla.

Sin embargo, todas las posiciones puras del pensamiento, sin distinción, no establecen relaciones singularmente existentes, sino universalmente existentes, que pueden usarse una y otra vez. De modo que nuestra relación fundamental siempre se puede poner de nuevo; de tal manera que estas posiciones repetidas de la misma relación (del mismo tipo, pero numéricamente diferente) también se relacionan entre sí. Esto sucede de tal modo que, luego de que primero se puso el uno en relación con el cero, ahora se establece uno nuevo en relación con el término final anterior (uno) como el nuevo miembro inicial (es decir, como un cero relativo). Obtengo así una serie que se puede escribir de la siguiente manera:

$$\begin{array}{l} \overset{\frown}{0\;1} \\ \quad\overset{\frown}{0\;1} \\ \qquad\overset{\frown}{0\;1} \\ \qquad\;\;. \\ \qquad\;\;\;. \\ \qquad\;\;\;\;. \end{array}$$

[4] O, en una notación que expresa, en los signos mismos y no sólo en la disposición espacial, en primer lugar, la diferenciación, y, en segundo lugar, el orden de las posiciones individuales:

$$0 \frown 1 \frown 2 \frown 3 \frown \ldots$$

donde los arcos escritos arriba indican que la igualdad constante de la relación de cada término subsiguiente con el término precedente de la serie. Una vez que se ha aclarado esto de una vez por todas, se pueden omitir los arcos, obteniendo así la llamada serie numérica absoluta.

Hay muchas cosas que se deben tener en cuenta sobre esto, que ahora no significa más que el *proceso de pensamiento* estrictamente puro, es decir, uno que no toma nada desde fuera - lo que solían entender por números, les pido que lo olviden por completo por esta hora - hay muchas cosas que notar ahora, de las cuales sólo explicaré lo indispensable para la ulterior deducción; sobre todo dos clases de igualdad para cualquier par de términos:

1. El 1 tiene, en cierto modo, la misma relación con el 3 que el 2 con el 4, etc., pero también el 3 con el 1, el 4 con el 2, es decir, se requiere la misma cantidad de pasos simples para pasar de un término a otro, siempre recíprocamente. Defino esta identidad como la *distancia* o valor numérico de la diferencia.
2. 1, 2. 3. . . tienen, independientemente de la distancia, el mismo tipo de relación con el 0 que 2, 3, 4, … con el 1, o 3, 4, 5… con el 2; en suma, cada término sucesivo de la serie con cada miembro precedente, y viceversa, cada término precedente tiene la misma relación con cada término sucesivo de la misma manera. Estos dos tipos de relación, por el contrario, son mutuamente excluyentes. Defino esta identidad o diferencia como la de la dirección.

Como puede verse, la distancia es de alguna manera independiente de la dirección, y la dirección de la distancia. Ambos momentos están intrínsecamente relacionados entre sí y se establecen simultáneamente en la construcción de nuestra serie, pero conceptualmente son distintos y no se pueden reducir uno al otro.

Pero como la relación original, entre uno y cero, es absolutamente simple, y toda la serie está formada por una mera repetición, pura e idéntica de esta misma relación fundamental, hasta ahora no hay en absoluto ninguna pluralidad del tipo de relación o dirección; a menos que llamemos dos direcciones las dos formas de relacionarse, uno a cero y cero a uno; en el lenguaje común son más bien los dos "sentidos" de una dirección, más y menos. Así, la dirección de toda la serie es única (aunque de doble sentido), y como tal se mantiene idéntica hasta el infinito. Hasta el infinito, porque la ley de su construcción excluye la posibilidad de que la serie vuelva sobre sí misma cómo la continuación de la serie numérica no puede conducir de nuevo a cero. Un retorno de la serie sobre sí misma significa un cambio de dirección, y el cambio continuo de dirección conduce, como se verá más adelante, necesariamente de regreso a la dirección fundamental. Pero antes de introducir un cambio de dirección, debe establecerse la identidad de la dirección. Por lo tanto, si se quiere proceder estrictamente de modo genético, no basta con decir que la transición de B a C debe realizarse de la misma manera que de A a B, lo que ciertamente la volvería necesariamente ilimitada, no infinita[4]. Por el contrario, dado que la transición tiene que establecerse de modo absolutamente simple, si debe tener un significado fundamental, la transición debe seguir existiendo como algo absolutamente simple, y no sólo ilimitada, sino infinita, porque sólo podría volverse finalmente ilimitada a través del cambio continuo, lo que inevitable-

4 Max Simon, *Zu den Grundlagen der nicht euklidischen Geometrie*. Teubner, Leipzig, 1981, p. 12.

mente requiere de determinaciones adicionales, no estaría unívocamente establecida a través de la simple posición de los términos *A* y *B.* Por la misma última razón, la definición de distancia proyectiva según Cayley y Klein, por valiosa que sea para el propósito para el que fue introducida, no puede considerarse lógicamente fundamental[5]

En esta consideración baso el concepto de la serie construida por nosotros como una serie *recta*. Este concepto de rectitud, como ven, ahora tiene un significado absoluto, no se trata sólo un tipo de serie entre varias igualmente válidas, sino más bien de la única disposición posible de una serie que debe ser fundamental. La rectitud indica de hecho, que el camino es determinado de manera única por el punto inicial y el final, y nada más. También se determina un camino en la superficie de la esfera, pero no en todos los casos; específicamente, no cuando los dos puntos son los extremos del diámetro de una esfera y, lo que es más importante aquí, no sin otros determinantes, a saber, los que definen la propia superficie esférica. Lo mismo ocurre en el espacio finito. Esto no significa que deba rechazarse el concepto general de espacio, sino que no por ser general es también lógicamente fundamental.

[5] La derivación de las operaciones aritméticas sólo se indica brevemente[6]. La construcción de nuestra serie muestra claramente que el 3 con respecto al 2, 2 con respecto al 1, y el 1 con respecto al 0, tienen la misma posición. En este enunciado, resumo que: 1) la distancia, el número de pasos que conducen de un término al otro, es la misma, 2) la dirección de comparación es la misma. Asimismo, el 2 respecto al 3, el 1 respecto al 2, el 0 respecto al 1, tienen la misma *posición*. Esto se expresa mediante la ecuación de la sustracción, que, como se ve, ahora incluye inmediatamente los dos casos en que el sustraendo es "mayor" o "menor" que el minuendo. La ecuación de la adición es sólo otra expresión del mismo estado de cosas, y de ninguna manera es más fundamental. 2 + 1 = 3 significa: un paso más desde 2 (en la dirección positiva) conduce a 3, lo que sólo significa en otras palabras: el 3 tiene la misma posición con respecto al 2 (es decir, la misma distancia en la misma dirección) que el 1 con respecto al 0. La relación de posición es el concepto fundamental, pero esto se expresa directamente en la ecuación de la sustracción.

Asimismo, baso la relación de multiplicación en el otro tipo de relación, la métrica, como yo la llamo. Se basa en la generación de la serie repitiendo siempre la misma relación fundamental. Ahora puedo repetir las mismas repeticiones, por ejemplo, poner el 2 como una nueva unidad, como un dos y luego formar la nueva serie: dos "doses", tres "doses", etc. Desde esta perspectiva, lo que 2 representa en relación con 1, 4 en relación con 2, etc., es equivalente a lo que 1 representa en relación con 2, 2 en relación con 4, etc. Aquí también, partiendo de la consideración de la relación[7] se ofrece la ventaja de que 1/n, como

5 Sobre esto, ver el segundo de los tratados citados., Arch. f. syst. Philos. VII, pp. 202 ss.

6 Más detalles en : "Nombre, temps et espace", §2.

7 En esto me sentí particularmente alentado por el estimulante tratamiento que hizo M. Simon de la metodología de la enseñanza de las matemáticas en el Manual de Baumeister.

valor recíproco de n/1, se da sin más. Pero observemos cómo esto concuerda con nuestro punto de partida lógico: la posición relativa también se confirma en todas partes como la fundamental en la implementación. No es más que un falso empirismo creer que hay que partir de la posición absoluta. Uno no es un concepto absoluto, uno puede significar un grano de arena o un mundo, cien o un billón; así que no hay problema en absoluto en entender por qué el uno es divisible, ya sea en cientos o en billones o lo que sea; mientras que quien parte del uno como absoluto no puede llegar a ½ de otra manera que no sea a través de una definición arbitraria.

Como lo admito abiertamente, lo irracional todavía crea una cierta dificultad. Creí (en el primer tratado) que podría dominar el asunto dejando primero hipotéticamente que series de unidades diferentes (digamos *n* y *v*) pero direcciones idénticas, partieran de un punto cero común, cada una construida racionalmente por separado, pero siendo irracionales entre sí; y luego mostrando (esencialmente, siguiendo a *Dedekind*) cómo ambas pueden relacionarse entre sí, no a través de ecuaciones sino a través de sistemas de desigualdades, de tal manera que de cualquier valor en la serie n puede determinarse si está en este lado o al otro lado de *v* o cualquiera de los valores de la serie *v* y viceversa, de modo que los conceptos mayor y menor, y todo lo que se base en ellos, se pueda aplicar a la comparación entre los valores *n* y *v*. Pero no hay manera de engañarse a uno mismo en la matemática, así que prefiero admitir abiertamente que ahora estoy experimentando una dificultad fundamental en esto. Contar significa ordenar en *una* serie, y, de hecho, se espera que los valores irracionales se incluyan en *una* serie junto con los racionales; pero la unidad de una serie única sólo se puede colocar una única vez, no varias veces, si se quiere que sea establecida de forma pura y fundamental, y no mediante una definición arbitraria. Además, hay un problema porque los valores irracionales no se pueden definir exhaustivamente de manera positiva; se pueden definir los irracionales algebraicos y ciertas clases de trascendentes, pero no los valores irracionales en general. Entonces, ¿cómo tengo la totalidad de los valores de un intervalo dado, por ejemplo, 0 a 1, que pretendo tener cuando afirmo que una cantidad *x* recorre continuamente este intervalo? Sólo una cosa me ha quedado siempre clara en este respecto y se ha establecido cada vez con más firmeza: esta totalidad, que implica continuidad, no se podría poner en absoluto a partir de consideraciones puramente métricas, sino que se basa y debe basarse en el concepto de unidad de dirección. No voy a decidir ahora si esto resuelve el problema, pero diría que es *un* momento sin el cual no se puede lograr la solución. Existe *una* característica positiva, que no sólo incluye todas las posiciones racionales de un intervalo, sino que también permite y exige que las brechas entre ellas, que pueden reducirse arbitrariamente, como algo existente. Esta característica es la dirección de relación, que, como se estableció al principio, persiste independientemente de la relación métrica. Puesto que todas las posiciones racionales (números en la serie numérica, puntos en la línea recta) se establecen en una y la misma dirección (relación cero), se puede considerar que. precisamente [6], porque tienen conexión continua, el intervalo desocupado o por ocupar por número racionales, puede considerarse disponible para nuevos posicionamientos, y esto también permite establecer los valores irracionales, en la medida en que para éstos se puede definir una relación del más y menos con los valores racionales en la forma indicada (mediante un sistema de desigualdades).

Cualquiera que sea o parezca ser el vacío que pueda haber en la derivación lógica, no ayuda apelar a la intuición para llenarlo. La intuición no puede dar al pensamiento en modo alguno algo que el pensamiento no pueda representar con sus propios medios. Debe ser posible pensar lo que se intuye para que sea conocido. Incluso la creación de la línea recta a través del "movimiento" de un punto produce continuidad de la misma manera que en el sentido que acabamos de explicar, ya que el movimiento en geometría[8] *) es "simplemente otra expresión para la totalidad de todas las posiciones"; pero si uno pregunta mediante qué definición se da esta totalidad de posiciones, se llega exactamente al razonamiento recién expuesto.

Suponiendo, sin embargo, que tuviéramos la serie unidimensional, homogénea y continua, entonces, como puede verse fácilmente, tenemos no sólo la serie de números reales, sino también la serie del tiempo y la línea recta, en cuanto a sus propiedades puramente matemáticas; de hecho, ambas se diferencian de la serie de números sólo por determinaciones existenciales, no matemáticas. Entonces sólo queda derivar la pluralidad de las dimensiones del espacio y, si es posible, encontrar una ley para ellas. Como ya se indicó, la teoría de la extensión, por un lado, y la teoría de los cuaterniones, por el otro, proporcionan la pista decisiva. Sin embargo, ni *Grassmann* ni *Hamilton* se propusieron la tarea de derivar radicalmente la pluralidad de las dimensiones; más bien, ambos las dieron por sentadas. Anteriormente, partí de la presuposición de la posibilidad de varias series de diferentes direcciones, pero conectadas en un punto común, que puede tomarse como el punto cero; y luego, establecí la ley para la constitución de una conexión continua de las direcciones posibles desde un mismo punto. Esta derivación debería seguir siendo correcta en lo que contiene positivamente, pero deja un vacío, ya que no queda inmediatamente claro en qué medida podría ser establecido algo fuera de la serie fundamental. Esto es especialmente difícil de comprender cuando se parte directamente del número (como hice anteriormente). Contar significa, como dije, ordenar en *una* serie, por lo que no habría nada más que una serie.

Sin embargo, una vez identificada, esta brecha pudo cerrarse fácilmente. Nuestra serie no significa una cosa, sino un proceso; por lo tanto, no sólo puedo formar una serie de este tipo, sino una serie de series, cada una con la misma estructura simple, y todas conectadas por una relación exactamente del mismo tipo que los miembros singulares están conectados en la serie fundamental. Esta serie de segundo orden tiene todas las mismas características que la serie fundamental, con la única diferencia de que los enlaces ahora son series, no términos individuales. Luego, también se puede formar una serie de series de series, etc. De este modo, tenemos las dimensiones antes que las direcciones, y son infinitas.

---

8 Según las palabras de Max Simons. *Zu den Grundlagen der nicht euklidischen Geometrie*, p. 12.

Pero con eso se da ahora la base que antes faltaba para la derivación de las direcciones. Hasta ahora sólo teníamos *una* dirección de la serie fundamental con sus dos sentidos, que, como deben tener una estructura exactamente idéntica en todas las series, se repite como la misma (concepto de paralelas). Sin embargo, para la derivación adicional, es más apropiado llamar también direcciones a los dos sentidos de una dirección; ambos, tanto direcciones como sentidos, indican sólo diferentes modos de relaciones, modos de relación con el cero, entre los que se comportan como más y menos, sólo se distinguen por el hecho de que una da directamente a la otra, sólo intercambiando los términos. De hecho, la relación de más a menos, tomada por sí misma, es la misma que de menos a más; por lo tanto, no se puede decir que una de las dos direcciones es más original, y la otra sólo se deriva de ella; lo original es más bien la relación de más y menos o de menos y más, y esto ya está dado con la relación fundamental sobre la que hemos visto construir todo hasta ahora, la relación 1 a 0, que incluye inmediatamente la relación 0 a 1 y la relación de estos dos tipos de relaciones. Repitiendo esta misma relación, de más a menos o de menos a más, ahora puede formar una serie: $+\frown-\frown+\frown-\frown\ldots$, o, $\_^{0}, \_^{1}, \_^{2},\ldots$, donde los miembros pares corresponden al + de la primera serie, los miembros impares corresponden al -. Este es el caso dentro de la serie fundamental, así como en cada serie recta unidimensional. Sin embargo, al introducir varias dimensiones, surgen más direcciones de la siguiente manera. En todas las series construidas de forma de la misma manera se pueden encontrar el término 0, el término 1, etc. Si distingo los términos correspondientes de las diversas series [7] por medio de índices, puedo formar la serie $0_0, 0_1, 0_2\ldots$ (es decir, el cero de la serie cero, de la serie uno, etc.), que tiene el término 0_0 en común con la serie fundamental ($0_0, 1_0, 2_0, \ldots$). La primera serie también es recta, porque dado que las series, que por lo demás son idénticas en todos los aspectos, también deben estar dispuestas entre sí en la misma relación simple que los miembros de la serie fundamental, así también entre los miembros idénticos de todas las series sólo puede tener lugar la misma relación simple, que hemos definido como rectitud. Por lo tanto, esta serie también tiene una dirección positiva y negativa por sí misma. La pregunta es cómo se relacionan con las direcciones más y menos de la serie fundamental. Respuesta: ambas deben comportarse de la misma manera con ambas, es decir, la relación de más a menos o de menos a más de la serie fundamental debe pensarse como dividida en dos por la serie transversal, así como la relación más con menos o menos con más de la fila transversal debe pensarse como dividida en dos por la serie fundamental. Dado que, como siempre en la derivación genética, se debe poner a la base el caso de la igualdad; una relación desigual requeriría otros determinantes que están excluidos por el principio genético de derivación. Por lo tanto, tenemos que ahora introducir en nuestra serie $-^{0}\ -^{1}\ -^{2}\ \ldots$ los términos $-^{1/2}\ -^{3/2}\ \ldots$ Es fácil probar que la primera serie, y por lo tanto, también la serie así completada, puede tratarse enteramente como una serie de potencias de -1 o -*n*, de modo que la recta ortogonal, que es representada por nuestra serie transversal, debe expresarse por el número imaginario ordinario, no por una mera analogía o metáfora, sino según la construcción en la que la perpendicular, y por otro lado el imaginario, se nos ha generado. Ambas se expresan entre sí tan ineludiblemente como la línea recta expresa la serie unidimensional y homogénea de números, y viceversa. También es fácil derivar la división angular adicional, que corresponde, con la misma necesidad lógica, con la raíz arbitraria de la unidad. A partir de estos fundamentos, podrán fácilmente derivar los teoremas decisivos de la planimetría, lo que dejo para su interés y dedicación. He seguido este camino cierto tiempo y no me he encontrado con dificultades que sean peculiares a este tipo de derivación.

Sin embargo, queda por decidir una cuestión: determinar si, sobre las bases establecidas, también se puede derivar una ley para las dimensiones del espacio. A los matemáticos les resulta tan familiar el concepto general de espacios de cualquier cantidad de dimensiones y características diversas que a menudo carecen de comprensión para el concepto euclidiano, newtoniano y kantiano del espacio, donde la característica de unicidad es esencial. Hay una razón comprensible para esto: esta característica de unicidad ya no se basa en una fundamentación puramente matemática, sino que es exigida por el concepto de *existencia*, que no quiere decir más que determinación de un modo único, en contraste con la infinita multiplicidad de posibilidades abiertas. Sin embargo, este último concepto, de hecho, lo exige incondicionalmente. Ningún lugar de existencia está determinado de manera única a menos que el espacio mismo, que sólo especifica el sistema de condiciones de la determinación del lugar, esté determinado de manera única. Sin embargo, de esto se sigue que, aunque la exigencia en sí misma no es puramente matemática, plantea la tarea para la matemática de probar las condiciones a partir de las cuales es posible esta clausura requerida y así la unicidad del sistema de determinación de lugares. En nuestro sistema demostrado hay suficiente conexión, pero no es cerrado, ya que nos vimos obligados a admitir no sólo un infinito dentro de cada serie individual, ni siquiera sólo una serie infinita de series, sino una infinitud de dimensiones, es decir, de series de series de series. etc, *in infinitum*. La infinitud de dimensiones, sin embargo, excluye la posibilidad de determinar de un lugar. Entonces, la pregunta ya no es hasta dónde se puede extender una conexión similar a un espacio, sino qué condiciones son necesarias, por un lado, y suficientes, por otro, para establecer una conexión continua en general. Sin embargo, se puede demostrar que se necesitan y al mismo tiempo son suficientes tres dimensiones para ello. Supongamos que la serie fundamental es representada por una recta infinita xx', y en ella O es el punto cero, OA la unidad en la dirección fundamental. No puedo pasar de modo continuo de esta a la dirección opuesta OA', mientras permanezca en la recta xx', sino sólo por saltos. Para establecer una conexión continua, tengo que rotar el rayo OA[9], por lo que necesito el plano, por ejemplo, xz. La rotación es posible en dos sentidos, desde la posición OA hacia la izquierda a través de OP o hacia la derecha a través de OP en OA'. La rotación a la izquierda

9 No nos escandalizaremos por la introducción del concepto de rotación después de lo que se señaló anteriormente (p.6) a propósito del concepto de movimiento en geometría.

del rayo (en el sentido de AP) no se puede convertir de manera continua en la rotación a la derecha (en el sentido de AP') mientras permanezca en el plano, sino que tengo que rotar el plano en el espacio. Esta rotación es de nuevo posible de dos maneras, desde [8] OP hacia adelante sobre OQ o hacia atrás sobre OQ' en OP'. La rotación hacia adelante del plano (en el sentido de PQ) ahora se puede convertir de modo continuo en la rotación hacia atrás (en el sentido de PQ') sin introducir una dimensión adicional; y esto se logra girando el plano XZ sobre el eje *X*, sino sobre eje *Z*: la rotación hacia adelante sobre el eje X se convierte entonces en la rotación hacia atrás, donde PQP' adopta la posición PQ'*P'*. A su vez, la rotación alrededor del eje Z puede ocurrir de dos maneras, pero se aplica igual que antes a esta doble dirección que a la doble rotación anterior sobre el eje. *H. Grassmann* (por carta) me llamó la atención sobre un ocasional comentario similar de Felix Klein (Math. Ann. XXXVII, p.565). Klein, sin embargo, parte de un punto de vista completamente diferente y ni siquiera formuló la pregunta en el sentido que aquí se entiende. Sin embargo, confirma indirectamente la corrección del resultado: que las tres dimensiones son necesarias y suficientes para establecer una conexión generalmente continua del espacio[10].

Me gustaría enfatizar, aunque pueda parecer innecesario, que esta demostración de ninguna manera afecta la noción de espacios de más de tres dimensiones. Sin embargo, surge la cuestión, *si* se exige un sistema cerrado (y se exige, aunque no desde un punto de vista matemático, sino a través del concepto de existencia, con el que la matemática como tal no tiene nada que ver), de cómo justificar matemáticamente esta clausura del sistema. Si es de la manera indicada, y si no es de otra manera, entonces la tridimensionalidad del espacio en términos de *existencia* está demostrada. En cualquier caso, la cuestión no puede decidirse empíricamente de ninguna manera concebible, sino que es completamente una cuestión de construcción, es decir, debe decidirse puramente sobre la base de la construcción.

De esta manera, la matemática pura sería "como un coloso", como dice *Kant*, destinada "a la prueba del conocimiento ampliado solamente por la razón pura"; es decir, en nuestros términos, como un ejemplo típico de una ciencia estrictamente construida genéticamente sobre la única base del pensamiento puro. Al menos, este es el objetivo ideal hacia el cual nuestra deducción se acerca desde lejos. Sin embargo, cualquier crítica será bienvenida si facilita dar un pequeño paso adelante en el camino hacia este objetivo "infinitamente lejano".

---

10 Por otro lado, la idea fundamental de la deducción anterior la encuentro casi por entero en *Gestaltung des Raums* de Pietzker (Brschwg., 1891, pp. 64ss.), aunque la tesis allí se expresa de manera diferente y la formulación de la prueba no está completamente exenta de cierta oscuridad, lo que podría haber dificultado su comprensión para algunos lectores. Espero que aquellos que estén convencidos de la corrección de la deducción anterior no menosprecien el mérito de ese trabajo, que es aproximadamente diez años más antiguo.