

ABSTRACCIONISMO MATEMÁTICO Y FILOSOFÍA DE LA GEOMETRÍA

EDUARDO N. GIOVANNINI

CONICET y Universidad Nacional del Litoral.

E-Mail: engiovannini@conicet.gov.ar

Resumen: *El abstraccionismo matemático es la posición según la cual el método de abstracción debe desempeñar un papel central en los intentos de proporcionar un fundamento filosófico para las matemáticas modernas. En este trabajo nos proponemos explorar la relevancia de esta posición para la fundamentación axiomática moderna de la geometría euclídea. Con este fin, nos centraremos en la llamada concepción abstraccionista de las magnitudes geométricas, según la cual las distintas clases o especies de magnitudes se obtienen por abstracción a partir de un sistema de cantidades geométricas, tomando como base una relación de equivalencia definida en términos estrictamente geométricos. Tras ofrecer un breve panorama histórico sobre el desarrollo de esta concepción, sostendremos que un análisis más preciso del enfoque abstraccionista de las magnitudes geométricas plantea cuestiones filosóficamente relevantes en relación con el ideal de la pureza del método en la fundamentación de la geometría.*

Palabras clave: *geometría; abstracción; magnitudes; pureza del método; axiomática moderna*

Abstract: *Mathematical abstractionism is the position that claims that the method of abstraction must play a central role in the attempts to provide a philosophical foundation for modern mathematics. In this paper, we aim to explore the relevance of this position for the modern axiomatic foundation of Euclidean geometry. To this end, we focus on what we call the abstractionist conception of geometrical magnitudes, according to which the different kinds or species of magnitudes are obtained by a process of abstraction from a system of geometrical quantities, on the basis of an equivalence relation defined in strictly geometrical terms. After providing a brief historical overview of the development of this conception, we argue that a closer examination of the abstractionist approach to geometrical magnitudes brings to light philosophically significant issues concerning the ideal of purity of method in the foundations of geometry.*

Keywords: *geometry; abstraction; magnitude; purity of method; modern axiomatics*

Introducción

El abstraccionismo matemático es una de las posiciones más influyentes y técnicamente sofisticadas en la filosofía contemporánea de la matemática. En términos generales, esta posición sostiene que el método de abstracción debe desempeñar un papel preponderante en los intentos de proporcionar un fundamento filosófico para las matemáticas modernas, esto es, en la elaboración de una respuesta sistemática a los problemas centrales de la epistemología, la ontología y la semántica de las matemáticas. En el contexto contemporáneo, el término ‘abstracción’ se refiere específicamente a los llamados ‘principios de abstracción’. Estos principios son una clase especial de axiomas matemáticos que establecen criterios de identidad para *abstracta* a partir de una relación de equivalencia sobre distintos tipos de entidades (usualmente objetos, conceptos o propiedades). Se considera usualmente que un principio de abstracción tiene la siguiente forma general:

$$\forall \alpha \forall \beta (\$ \alpha = \$ \beta \leftrightarrow \alpha \sim \beta)$$

donde ‘\$’ es un operador que se aplica al tipo de expresiones de α y β , y ‘ $\sim$ ’ es una relación de equivalencia sobre las entidades denotadas por las expresiones de aquel tipo.¹ En el marco de las matemáticas de finales del siglo XIX y principios del XX, los principios de abstracción fueron intensamente discutidos en relación con un procedimiento de definición conocido como el “método de las definiciones por abstracción”.

El abstraccionismo matemático es una posición que ha sido desarrollada y defendida principalmente en conexión con la filosofía de la aritmética y el análisis, es decir, con la búsqueda de un fundamento filosófico para la teoría de los números naturales y reales. Como es bien conocido, los principios de abstracción jugaron un papel central en el proyecto logicista de Frege (1884, 1893/1903) para la fundamentación de la aritmética, en tanto que la fatídica Ley Básica V era precisamente un principio de abstracción. Sin embargo, esta clase de principios proporciona la idea fundamental del llamado programa Neo-logicista (Wright 1983, Hale & Wright 2001), a saber: la propuesta de reivindicar el proyecto logicista fregeano para la aritmética y el análisis a partir de demostrar que la aritmética de Peano (de segundo orden) puede ser derivada de la lógica de segundo orden y de un principio de abstracción conocido como el ‘principio de Hume’.² En pocas palabras, el trabajo filosófico

1 Si α y β son variables de individuos, el principio de abstracción que resulta es de primer orden; si estas expresiones denotan en cambio variables de predicados, el principio de abstracción es de segundo orden.

2 Como bien se sabe, el Principio de Hume asigna números a conceptos de acuerdo con el criterio de que dos conceptos tienen el mismo número si y solo si los objetos que caen bajo ellos pueden ser puestos en una correspondencia uno-a-uno. El resultado técnico de que los axiomas de Peano pueden ser derivados de la lógica de segundo orden y del Principio de Hume, adoptado como un axioma lógico, se lo conoce como el ‘Teorema de Frege’. Para una presentación sistemática de los principales resultados técnicos y filosóficos del programa neo-logicista, véase Ebert & Rossberg (2016).

sobre los principios de abstracción ha estado principalmente enfocado en los fundamentos de la aritmética y el análisis.

Ahora bien, la significación filosófica del método de abstracción para los fundamentos de la geometría ha comenzado a ser explorada en algunos trabajos recientes. Por un lado, desde una perspectiva histórica, Mancosu (2016) ha mostrado cómo el uso de principios de abstracción era una práctica muy extendida en la geometría de fines del siglo XIX, especialmente en conexión con el antes mencionado método de definiciones por abstracción. Por otro lado, desde una perspectiva sistemática, Hellmann y Shapiro (2018) han investigado el uso de principios de abstracción para una construcción “aristotélica” del continuo geométrico, esto es, para la elaboración de una geometría sin puntos (*point-free geometry*). La relevancia filosófica del método de abstracción en geometría no está así vinculada *prima facie* con un proyecto de reducción de la geometría a la lógica, sino con la explicitación de sus implicancias metodológicas, epistemológicas y ontológicas para la fundamentación de la geometría.³

El objetivo de este trabajo es explorar la relevancia del abstraccionismo matemático para la filosofía de la geometría a partir del examen de una aplicación específica de este método en la fundamentación axiomática moderna de la geometría elemental, a saber: el desarrollo de una ‘concepción abstraccionista’ de las magnitudes geométricas. Brevemente, un tema central en la geometría euclídea elemental es el estudio y el tratamiento adecuado de las magnitudes geométricas, esto es, la longitud de los segmentos lineales, la amplitud de los ángulos, las áreas de las figuras planas, el volumen de los cuerpos sólidos, entre otras. Luego, cuando se adopta un abordaje estrictamente geométrico, que prescinde de los números reales (positivos) para *medir* estas magnitudes, las distintas clases de magnitudes geométricas son introducidas por *abstracción*. Por ejemplo, la longitud de un segmento cualquiera AB se define como la clase de equivalencia determinada por este segmento módulo la relación de congruencia geométrica. Lo que vuelve a este método más adecuado para el tratamiento de las magnitudes geométricas, en oposición al abordaje métrico basado en los números reales, es que la relación de equivalencia puede ser caracterizada en términos estrictamente geométricos.

Un aspecto relevante para mencionar, al menos desde una perspectiva filosófica, es que esta ‘concepción abstraccionista’ de las magnitudes geométricas es presentada por lo

3 En la literatura especializada es habitual distinguir entre el ‘abstraccionismo matemático’, identificado con el proyecto de interpretar teorías matemáticas en base a principios de abstracción y una lógica subyacente, y el ‘abstraccionismo filosófico’, entendido como cualquier perspectiva que le asigna relevancia al abstraccionismo matemático para los fundamentos de la matemática [Cf. Boccuni y Zannetti 2024, p. 1]. Como se mostrará a continuación, en este artículo se explora la relevancia de una variante *débil* del abstraccionismo matemático aplicada a la geometría elemental, en la medida en que lo que se busca reconstruir o interpretar mediante principios de abstracción son *fragmentos* de dicha teoría (por ejemplo, la teoría del área plana). Esta interpretación, sin embargo, tiene consecuencias significativas tanto para la ontología como para la semántica de la geometría euclídea elemental.

general de un modo informal en las exposiciones modernas de la geometría elemental. Más específicamente, no solo los aspectos lógicos vinculados con las definiciones por abstracción no son analizados en este contexto, sino que tampoco los problemas conceptuales planteados por esta aplicación del método de abstracción son advertidos. En este trabajo, sostendré que un análisis más preciso de la concepción abstraccionista de las magnitudes geométricas plantea problemas fundacionales relevantes, en particular en relación con el ideal de la ‘pureza del método’ en la fundamentación de la geometría euclídea elemental.

La estructura del artículo es la siguiente. En la sección 2, comenzaremos con unas breves precisiones terminológicas en relación con el término ‘magnitud’. Seguidamente, en la sección 3, analizaremos brevemente las raíces históricas de la concepción abstraccionistas de las magnitudes geométricas en los *Elementos* de Euclides, y su reemplazo por una concepción métrica informal a partir del siglo XVII. En la sección 4, describiremos cómo el método de abstracción fue aplicado para proporcionar una definición lógicamente precisa de las distintas especies de magnitudes geométricas a fines del siglo XIX y comienzos del siglo XX. A continuación, en la sección 5, nos ocuparemos de mostrar cómo esta concepción abstraccionista se combina con lo que se conoce como la teoría axiomática estándar de las magnitudes (extensivas). Ello nos proporcionará los elementos básicos para examinar la significación filosófica del método de abstracción en la moderna geometría axiomática, en particular en relación con el ideal de la ‘pureza del método’. El trabajo culmina con unas breves consideraciones finales.

2. Consideraciones preliminares: precisiones terminológicas

La noción de magnitud (geométrica) y su relación con el método de abstracción matemática es el tema central de este trabajo; será conveniente comenzar entonces con una breve aclaración terminológica, puesto que la multiplicidad de significados asociados al término ‘magnitud’ a lo largo de la historia de la matemática, como así también su uso por momentos ambiguo en la literatura filosófica, han dado lugar en ocasiones a un empleo inconsistente de esta noción central. En un sentido general, el término ‘magnitud’ refiere a propiedades, cualidades o atributos de objetos o entidades, cuya característica fundamental es que pueden ser *comparados* en relación con esta propiedad, es decir, para los cuales pueden definirse relaciones de igualdad y orden (lineal o total). Las magnitudes para las cuales puede definirse además una ley de *composición interna* (o, intuitivamente, una operación de adición) son conocidas usualmente *magnitudes extensivas*. En cambio, aquellas clases de magnitudes para las cuales una operación de adición no resulta naturalmente posible, y solo pueden ser ordenadas linealmente, se las denomina *intensivas*. ‘Distancias’, ‘duraciones’, y ‘masas’ son ejemplos de las primeras, mientras que la ‘temperatura’ o la ‘dureza’ de un material son ejemplos de las segundas. En el contexto de la geometría, ‘longitud’, ‘amplitud’ (de un ángulo), ‘área’, ‘volumen’, son ejemplos de tipos o especies de magnitudes extensivas. Una primera distinción fundamental que debe así considerarse es entre los objetos o enti-

dades que tienen o poseen magnitud y las propiedades cuantitativas propiamente dichas. Siguiendo la terminología utilizada habitualmente en la literatura especializada, nos referiremos a los primeros como ‘cantidades’ (*quantities*), mientras reservaremos el término ‘magnitudes’ (*magnitudes*) para las segundas.

De la distinción anterior entre cantidades y magnitudes (extensiva) se sigue que debe distinguirse además entre los ‘tipos o especies de magnitudes’ y las ‘magnitudes’ mismas que instancian estos tipos o clases. Es decir, mientras que la expresión ‘tipo de magnitud’ se refiere a propiedades cuantitativas de determinada clase de objetos, tales como longitud, duración, masa, etc., la longitud medida por 1 metro, la duración medida por 1 segundo o la masa medida por un kilogramo, son instancias específicas de esta especie de magnitud. Esta distinción conceptual es relevante, dado que es habitual en ciertos contextos que no se distingan terminológicamente. Por ejemplo, el término ‘longitud’ suele ser usado para designar, de un modo impreciso, tanto el tipo de magnitud como la magnitud de un segmento en particular.⁴

Enfocándonos ahora más específicamente en el caso de la geometría, es posible distinguir dos abordajes principales en el estudio de las magnitudes geométricas. Un primer abordaje “métrico”, el más usual actualmente, que consiste en *medir* las distintas clases de magnitudes por medio de los números reales (positivos), es decir, en definir de un modo adecuado funciones de medidas que permiten asignarles a los distintos objetos geométricos (segmentos, ángulos, polígonos, poliedros, etc.) un número real (positivo) con base en una unidad de medida fija. Por ejemplo, consideremos el conjunto de los polígonos (simples) en el plano, un caso más interesante que el de los segmentos de recta. De acuerdo con este abordaje métrico, el área de un polígono plano es un número real (positivo), esto es, el número que resulta de aplicar una función de medida de acuerdo con las fórmulas habituales que toman al cuadrado de lado unidad como unidad de medida. La magnitud del polígono se identifica así con su *medida* de área, lo que da lugar a una *concepción métrica* de las magnitudes geométricas. Como hemos dicho, esta concepción métrica supone que se utilizan los números reales, con lo cual las distintas clases de magnitudes son *identificadas con sus medidas* expresadas numéricamente. En cambio, el segundo caso es estrictamente geométrico y consiste en *comparar* las magnitudes de los objetos geométricos con respecto a determinadas relaciones de equivalencia y no equivalencias descritas en términos puramente geométricos. Por ejemplo, en el caso de las áreas planas, las figuras poligonales pueden ser comparadas con respecto a la relación de equidescomposición, esto es, dos polígonos son equidescomponibles si pueden ser descompuestos en el mismo número de figuras *congruentes* de a pares. La relación de equidescomposición es una relación de equivalencia, con lo cual ‘el área’ de un polígono dado **P** puede definirse en términos conjuntistas modernos

4 Véase Peacocke 2019, para una discusión de carácter más metafísico sobre la relación entre las ‘magnitudes mismas’ y las ‘clases o especies de magnitudes’.

como la clase de equivalencia correspondiente (módulo equidescomposición). Luego, un aspecto central es que la estrategia de estudiar las diversas clases de magnitudes geométricas a partir de su comparación da lugar a una concepción *abstraccionista* de las magnitudes, donde estas son conceptualizadas más estrictamente como *propiedades* o atributos de objetos geométricos. Como veremos a continuación, la concepción abstraccionista de las magnitudes geométricas plantea interesantes problemas epistemológicos y metodológicos para la fundamentación de la geometría euclídea elemental.

Las raíces de la concepción abstraccionista de las magnitudes (geométricas): los *Elementos* de Euclides

Hemos sugerido en la sección anterior que la idea de construir las magnitudes como ‘abstracciones’ de objetos o entidades geométricas está íntimamente ligada al desarrollo de una teoría de la comparación, en oposición a una teoría de la medida, de magnitudes geométricas. En este sentido, el tratamiento de las magnitudes geométricas que desarrolla Euclides en los *Elementos* resulta un punto de partida natural para rastrear los orígenes de esta concepción abstraccionista. Más importante aún, la práctica euclidiana nos permitirá ilustrar una serie de problemas que luego resultarán relevantes para discutir la significación filosófica del abstraccionismo para los fundamentos de la geometría, especialmente en relación con el conocido requerimiento de la ‘pureza del método’.

Como es bien sabido, uno de los aspectos más cruciales de la matemática griega es la distinción entre dos dominios esencialmente diferentes de objetos: los números (discretos) (*arithmos*) y las magnitudes (continuas) (*megethé*). Esta distinción fundamental se refleja en el hecho de que la teoría de las proporciones en geometría y aritmética recibe un tratamiento separado y un fundamento independiente en los Libros V y VII de los *Elementos*, respectivamente. Euclides proporciona una definición explícita de ‘número’ en el Libro VII, Def. 1: “Un número es una pluralidad compuesta de unidades”. Por lo tanto, lo que Euclides entiende por número son los enteros positivos, siendo la unidad una entidad indivisible. Por el contrario, no encontramos una definición equivalente para el término ‘magnitud’ en el Libro V ni en el resto de los *Elementos*. Euclides simplemente postula ciertas condiciones para que algo sea considerado una magnitud y asume que ciertas operaciones pueden ser realizadas con estas magnitudes. Este fundamento implícito para la teoría de las magnitudes proporciona la base para un tratamiento abstracto de las razones y la proporcionalidad en el famoso Libro V.

El desarrollo de los Libros I-IV de los *Elementos* sugiere que los segmentos lineales, las figuras rectilíneas planas (triángulos, rectángulos, paralelogramos, etc.) y los ángulos son ejemplos de ‘magnitudes’ (*megethé*).⁵ Ello contrasta con nuestra concepción moderna,

5 El caso de los ángulos es problemático, puesto que no está claro cómo la operación de adición de ángulos puede ser realizada. En particular, Euclides solo considera como ángulos aquellos iguales a menores de dos rectos, de modo que la suma de ángulos que superan los dos rectos no estaría definida.

puesto que pensamos en las longitudes, las áreas, las amplitudes y los volúmenes como clases o especies de magnitudes geométricas. El hecho de que la referencia primaria de los términos de ‘magnitud’ sean los objetos mismos está claramente relacionado con un aspecto fundamental de la práctica geométrica de Euclides. En los *Elementos*, Euclides nunca utiliza números para medir la longitud de segmentos, el área de polígonos, o el volumen de una figura sólida. Por el contrario, su estrategia consiste en comparar el ‘tamaño’ de dos figuras geométricas de acuerdo con una relación específica (pero no definida) de ‘igualdad’; por ejemplo, en el caso de los polígonos planos, la relación de igualdad (de área o contenido) consiste en añadir o sustraer figuras congruentes de a pares. En la práctica, Euclides utiliza entonces el término ‘magnitud’ como una denotación genérica para referirse a objetos o entidades geométricas (particularmente, segmentos lineales y figuras planas) en tanto que son *considerados en cuanto a su tamaño*. Una ‘longitud’ es un segmento de recta en cuanto este es dado o considerado exclusivamente en relación con su ‘tamaño’ o ‘magnitud’; un ‘área poligonal’ es una figura rectilínea plana cuando se la considera como dada en magnitud. Esta concepción determina así una dependencia fundamental de las magnitudes respecto de los objetos o entidades geométricas, en cuanto no pueden ser tratadas o manipuladas con independencia de estos. Las operaciones y la comparación de magnitudes geométricas se fundan en las operaciones sobre los objetos geométricos.

En el Libro V, Euclides asume que las siguientes operaciones pueden ser realizadas sobre magnitudes: *i*) adición o composición (interna); *ii*) comparación (i.e., existencia de un orden lineal); *iii*) multiplicación por un entero positivo (i.e., tomar equimúltiplos); *iv*) tomar la n -ésima parte de una magnitud dada. Estas operaciones dan así sustento a la definición clásica de magnitud, según la cual ‘magnitud’ es todo aquello que puede ser incrementado y comparado’. Asimismo, Euclides presupone que las siguientes propiedades y suposiciones básicas son válidas para el dominio de magnitudes M :

- Va.** $(\forall a, b \in M)(\exists n \in \mathbb{N})(na > b)$
- Vb.** $(\forall a, b \in M)(\exists c \in M)(a > b \Rightarrow a = b + c)$
- Vc.** $(\forall a, b, c \in M)(a > b \Rightarrow a + c > b + c)$
- Vd.** $(\forall a \in M)(\forall n \in \mathbb{N})(\exists b \in M)(na = b)$
- Ve.** $(\forall a, b, c, \in M)(\exists d \in M)(a : b :: c : d)$

Va. es el conocido principio arquimediano para magnitudes; **Vb.** es un axioma de comparabilidad; **Vc.** garantiza que la adición es compatible con el orden; **Vd.** es un principio de divisibilidad, mientras que **Ve.** garantiza la existencia de la cuarta proporcional. En términos modernos, el dominio de magnitudes constituye un semigrupo ordenado arquimediano.⁶ La teoría de las magnitudes es un tema central en la geometría de Euclides, pero

⁶ Para una reconstrucción matemática moderna de la teoría de las magnitudes de Euclides, véase Błaszczyk y Petiurenko (2019).

para nuestros objetivos basta con hacer unas breves observaciones generales. En primer lugar, una suposición fundamental de las propiedades básicas de las magnitudes es el principio de *homogeneidad*, que es formulado por Euclides en las definiciones que establecen las condiciones de una razón entre dos magnitudes: “Una razón es determinada relación con respecto a su tamaño entre dos magnitudes homogéneas” (Def. 3) y “Se dice que guardan razón entre sí las magnitudes que, al multiplicarse, pueden exceder una a otra” (Def. 4). En la geometría griega, sólo es posible comparar y realizar operaciones (adición, sustracción, multiplicación por un entero, formar razones) sobre magnitudes de una misma clase. Este principio está así íntimamente vinculado con la dependencia de las magnitudes respecto de los objetos o entidades geométricas, es decir, en una concepción ‘abstraccionista’ de las magnitudes como propiedades o atributos de objetos o figuras geométricas. En una concepción ‘métrica’ de las magnitudes geométricas, donde la magnitud de una figura (p.ej., el área de un triángulo) se identifica con la medida expresada numéricamente, esto es, con un número, es posible comparar y operar con magnitudes de distinta clase. Pero para ello las magnitudes geométricas deben convertirse en números, algo que resulta contrario al pensamiento matemático griego.

En segundo lugar, si bien la dependencia fundamental de las magnitudes respecto de las figuras geométricas es un aspecto fundamental de la práctica euclidiana, en ningún momento se asocia a las operaciones sobre magnitudes un sentido o carácter constructivo. Es decir, de acuerdo con esta concepción, para sumar dos magnitudes de un tipo particular debemos sumar o componer dos figuras de la clase correspondiente; sin embargo, en ningún momento Euclides aclara de un modo explícito cómo estas operaciones pueden ser llevadas a cabo. Más aún, diversas propiedades fundamentales de magnitudes geométricas carecen de un sentido constructivo, en tanto que no pueden ser llevadas a cabo con medios euclidianos. El caso más típico es el de la divisibilidad (**Vd**), puesto que para el caso de ángulos no puede realizarse con regla y compás (imposibilidad de la trisección del ángulo). En suma, las magnitudes tienen un carácter ‘abstracto’ puesto que simplemente se asume que las operaciones antes mencionadas pueden ser llevadas a cabo.

Ahora bien, hacia los siglos XVI y XVII, las nociones griegas clásicas de números (discretos) y magnitudes (continuas) se vieron afectadas por una transformación radical, conectada con la creciente importancia de los métodos algebraicos. La estricta distinción griega desapareció gradualmente y fue reemplazada por una *comprensión numérica* de las magnitudes continuas medibles, aunque como no podía ser de otro modo, presentada informalmente. Dicho brevemente, durante este período era común una comprensión *informal*, según la cual se identificaba una magnitud geométrica con el *valor numérico de su medida*: la longitud de un segmento o el área de un triángulo se identificaban con el número que expresaba su medida. Malet (2016) muestra que esta comprensión numérica de las magnitudes geométricas puede encontrarse ya en el siglo XVI, en autores como Tartaglia, Clavius y Billingsley, entre otros. La idea filosófica central en la base de esta transformación

era que la medida pertenece intrínseca a la naturaleza de las magnitudes – esto es, que no es posible concebir una magnitud geométrica con independencia de su medida – y que esta última solo podía ser expresada numéricamente.⁷

Esta comprensión numérica tácita de las magnitudes geométricas estaba ya completamente asimilada en el siglo XIX y constituía la concepción dominante. De hecho, funcionaba como un supuesto fundamental en las críticas dirigidas a la teoría clásica de las magnitudes y las proporciones del Libro V de los *Elementos* durante este período. El siguiente pasaje de una conocida carta de Lipschitz a Dedekind, escrita a propósito de la idea de que todo lo esencial en la teoría de las cortaduras de Dedekind se encuentra ya en el Libro V de Euclides, ilustra este muy elocuentemente:

Desde mi punto de vista, uno de los mayores logros del espíritu griego es haber fijado para siempre el concepto básico de número irracional. (...) En aquella definición [V.5], Euclides presupone la existencia de razones que no son iguales a la razón *entre dos números enteros*. Usted [Dedekind] tiene de antemano la intención de presuponer sólo números racionales, y magnitudes medibles por medio de números racionales. En este fragmento Euclides procede de otro modo, y aquí está el núcleo de sus diferencias con él. Euclides considera que *una magnitud (Grösse) está determinada por la medida de una línea bien definida*, y bajo este punto de vista puede mostrar líneas que, respecto a una línea dada, están en una proporción que no puede expresarse mediante dos números enteros. (Lipschitz a Dedekind, 6 de julio de 1876; en Dedekind 1998, pp. 164-165. El énfasis es nuestro.)

Este pasaje muestra con claridad la suposición firmemente establecida en el siglo XIX, según la cual las magnitudes geométricas se identificaban con sus medidas expresadas numéricamente. Dado que la famosa definición euclidiana de la identidad de razones entre dos magnitudes se entendía como la igualdad entre razones numéricas, la teoría de las proporciones de Euclides descansaba implícitamente en el concepto de número irracional. La geometría clásica, y especialmente la teoría de las proporciones y la semejanza, descansaba así sobre un fundamento aritmético antes que sobre uno genuinamente geométrico. Detrás de la búsqueda de un nuevo fundamento o base independiente para la geometría elemental se encontraba, en última instancia, la concepción de que una magnitud geométrica es esencialmente un número, o, más precisamente, su medida expresada numéricamente.

Magnitudes geométricas por abstracción

En esta sección, analizaremos brevemente la propuesta de proporcionar una caracterización más rigurosa de la ‘concepción abstraccionista’ de las magnitudes geométricas utilizando la

⁷ Para un estudio histórico revelador de esta transformación de la transformación del concepto griego de magnitud en la temprana edad moderna, véase Malet (2016).

técnica de las definiciones por abstracción. La breve reconstrucción histórica que se ofrece a continuación se apoya de un modo significativo en el notable trabajo de Mancosu (2016).

El método de las definiciones por abstracción es bien conocido y constituye una técnica básica en la matemática contemporánea; sin embargo, resulta oportuno recordar la idea general de este método. El punto de partida es una relación de equivalencia " (i.e., una relación reflexiva, simétrica y transitiva) sobre distintos tipos o clases de entidades (usualmente, objetos, conceptos o propiedades). En una definición por abstracción, ignoramos o desestimamos cualquier característica específica o individual de estas entidades; en cambio, lo único relevante es si se guardan o se encuentran en la relación. Los objetos relacionados por la relación de equivalencia se particionan entonces en clases mutuamente excluyentes y conjuntamente exhaustivas de tal manera que los objetos relacionados por pertenecen a una y sólo una clase. Una definición (o un principio) por abstracción establece una condición tal que esta identificación de los elementos es capturada por una relación funcional F que satisface la siguiente condición:

$$\text{Para todos los } a, b \text{ en Dom, } F(a) = F(b) \text{ si y sólo si } a \sim b,$$

donde Dom refiere al dominio conformado por la clase de objetos o entidades. Como se nota, la función F desempeña el papel de abstraer de la naturaleza peculiar de las entidades a y b y las considera asociadas al único valor $F(a) (= F(b))$ en virtud de que a y b están relacionadas por la relación de equivalencia. Así, estas entidades son *indistinguibles* desde el punto de vista de la relación de equivalencia. En breve, en una definición por abstracción se introduce un *nuevo objeto abstracto* al establecer condiciones de identidad basadas en relaciones de equivalencia apropiadas sobre entidades de distinto tipo.⁸

Un conocido ejemplo de la aplicación de este método es la definición de Frege de la identidad de 'dirección' entre líneas en base a la relación de paralelismo:

El juicio: "la recta a es paralela a la recta b ", simbólicamente $a \parallel b$, puede tomarse como una ecuación. Si lo hacemos así, obtenemos el concepto de dirección y podemos decir: 'la dirección de la recta a es igual a la dirección de la recta b '. Sustituimos, pues, el signo $\parallel$ por el más general '=', distribuyendo el contenido particular del primero entre a y b . Fragmentamos el contenido de manera distinta a la originaria y obtenemos así un nuevo concepto. (Frege 1884, § 64)

Frege introduce así el llamado principio de abstracción para direcciones:

$$(Dir) \quad d(l_1) = d(l_2) \leftrightarrow l_1 \parallel l_2$$

8 Cf. Mancosu (2016, pp. 14-15).

A menudo se ha destacado que Frege fue un pionero en este método de definiciones en matemáticas. En efecto, ello es sugerido por el propio Frege, al advertir que “naturalmente, esto parecerá un tipo muy extraño de definición, que ciertamente no ha sido estudiado lo suficiente por los lógicos; pero que este modo de definir no es inaudito, pueden mostrarlo algunos ejemplos” (Frege 1884, §63). Sin embargo, el método de abstracción era una práctica muy extendida y bien establecida en la matemática del siglo XIX y comienzos del siglo XX. Mancosu (2016) recoge y analiza el amplio uso del método de abstracción en las matemáticas del siglo XIX, aportando una gran cantidad de ejemplos provenientes de la teoría de números, los sistemas numéricos (complejos e irracionales), la teoría de conjuntos e incluso la física. Antes de enfocarnos en la introducción del concepto de ‘magnitud geométrica’ por medio de definiciones por abstracción, mencionaremos brevemente otros ejemplos en la geometría del siglo XIX.

Una fuente notable de definiciones por abstracción en geometría es el libro *Teoría de la extensión* [*Ausdehnungslehre*] de Hermann Grassmann de 1844. En este trabajo, el proceso de introducir identidades basadas en una relación de ‘igualdad’ [i.e., equivalencia] es explicado y practicado con completa claridad. A partir de un análisis muy detallado de la noción de ‘igualdad’ en matemáticas, Grassmann explica que la igualdad puede ser predicada de muchas maneras diferentes concentrándose en propiedades particulares de los objetos. Así, lo que decimos propiamente que es idéntico son los ‘abstracta’ obtenidos de los objetos originales. Por ejemplo, en el caso de la longitud, dos segmentos pueden ser diferentes, aunque sus longitudes sean idénticas. Grassmann explica este proceso de abstracción en el contexto de la geometría pura, de la siguiente manera:

Si abc [un triángulo] es congruente con def , entonces nos preguntamos: ¿qué es lo igual entre los dos conjuntos de puntos? Por supuesto, alguna función geométrica de los tres puntos a, b, c debe ser igual a la función correspondiente de los tres puntos d, e, f . Designaremos tentativamente esta función con el símbolo *figura* o *fig.*, y en lugar de escribir $abc \text{ def}$, escribiremos ahora $fig.(abc) = fig.(def) (\dots)$ Así, por ejemplo, podemos decir que dos *figuras semejantes* tienen sus *formas* [Gestalt] iguales, y de ese modo en lugar de $abc \text{ def}$, escribimos $form.(abc) = form.(def)$. Podemos expresar así la igualdad de área entre tres puntos, de volumen entre cuatro puntos cualesquiera, o incluso la afinidad, a través de símbolos especiales (Grassmann 1995, 331-332. Citado en Mancosu 2016, p. 50)

Grassmann explica aquí con mucha claridad cómo es posible definir por abstracción el concepto ‘forma’ de una figura triangular sobre la base de la relación de semejanza geométrica, esto es, una relación de equivalencia. En símbolos, Grassmann formula aquí el siguiendo principio de abstracción para ‘formas’:

$$(form) \quad form(abc) = form(def) \leftrightarrow abc \sim def,$$

donde “ $\sim$ ” denota la relación geométrica de semejanza de triángulos.⁹

Un aspecto central es cómo debe entenderse el *valor* de las funciones implicadas en las definiciones por abstracción, en este caso, el valor de la función $form(xyz)$. De acuerdo con la reconstrucción histórica elaborada por Mancosu (2016), durante este período es posible identificar tres *interpretaciones* distintas del valor que toma una función de abstracción. Para la primera, el objeto ‘abstracto’ arrojado por la función de abstracción era un *representativo (canónico)* de la clase de equivalencia correspondiente. Este tipo de interpretación era especialmente común en la teoría de números durante el siglo XIX, donde como resultado de la abstracción se elegía un representativo canónico de la clase de equivalencia en virtud de alguna propiedad en particular, por ejemplo, por ser el elemento menor o mínimo en un sentido aritmético o algebraico. Nótese que este objeto ‘abstracto’ era del mismo tipo o clase de objetos que conforman el dominio *Dom* de la función de abstracción. La segunda opción, en cambio, consistía en tomar a la clase de equivalencia misma como valor de la función de abstracción. Un ejemplo de esta interpretación es la definición de dirección de Frege (1984), donde ‘la dirección de una línea l_1 ’ es identificada con la clase de todas las líneas paralelas a l_1 (esto es, con la clase de equivalencia). Como se sabe, esta opción se volvió habitual a partir de los trabajos de Frege. Por último, la tercera opción consistía en asignar a cada objeto a del dominio de la función de abstracción, un *nuevo* ‘objeto abstracto’ α , que no coincide ni con la clase de equivalencia ni con ningún objeto de la clase.¹⁰ Esta opción era así bastante habitual en la geometría sintética, en particular en la escuela de Peano, donde no era posible tomar un representante de la clase de equivalencia, a menos que se seleccionara uno arbitrariamente.

Ahora bien, un avance notable en la comprensión y explicación lógica de las definiciones por abstracción fue alcanzado por la escuela de Peano, cuyos autores proporcionaron en una serie de importantes trabajos los fundamentos para la concepción lógica moderna de este método matemático. Especialmente, deben destacarse las contribuciones de Peano (1888, 1894), Burali-Forti (1894), Vailati (1894) y Padoa (1908). Más relevante aún para nuestro caso, en estos trabajos encontramos quizás por primera vez una explicación lógica precisa de la concepción abstraccionista de las magnitudes geométricas fundada en la técnica de las definiciones por abstracción. Esta concepción abstraccionista es articulada de la siguiente manera por Peano (1888):

Toda igualdad entre entidades de un sistema que es diferente de la identidad es equivalente a la identidad entre entidades obtenidas a partir de las del sistema dado,

⁹ Se dice que dos triángulos son semejantes si sus ángulos correspondientes son congruentes.

¹⁰ Cf. Mancosu (2016, p. 34).

abstrayendo todas y solo aquellas propiedades que distinguen una entidad de aquellas que son iguales a ella. Así, la igualdad ‘el segmento AB se puede superponer sobre el segmento $A'B'$ ’, es equivalente a la identidad entre las entidades que pueden ser obtenidas a partir de cada segmento abstrayendo de aquellas propiedades que lo distinguen de todos aquellos con los que puede superponerse. La entidad que resulta de esta abstracción se llama la *magnitud* [*grandezza*] de un segmento; la primera igualdad es así equivalente a la identidad de las magnitudes de dos segmentos. Si convenimos indicar la identidad con el símbolo $=$, la igualdad así considerada puede escribirse de la siguiente manera $Gr\ AB = Gr\ A'B'$. (Peano 1888, pp. 152-154. Citado por Mancosu 2016, p.89)

En este pasaje, Peano advierte que podemos concebir la ‘magnitud’ (i.e., longitud) de un segmento dado como el resultado de una definición por abstracción que toma la relación de ‘congruencia geométrica’ como la relación de equivalencia relevante. Así, mientras que un segmento dado AB puede ser concebido como una ‘cantidad’, su ‘magnitud’ específica se obtiene a partir del conjunto de todos los segmentos abstrayendo todas aquellas propiedades diferentes a la congruencia segmentaria. Para ser más precisos, Peano afirma que el proceso de abstracción recién descrito da como resultado una nueva entidad ‘abstracta’, un objeto *sui generis*, que no debe ser identificado ni con la clase de equivalencia ni con un representante de la clase. Ello se debía a una preocupación ontológica de acuerdo con la cual los ‘abstracta’ debían ser entidades simples.

Una explicación lógicamente más precisa, que toma como ejemplo concreto el caso de las áreas de los polígonos planos, es desarrollada por A. Padoa en un importante trabajo de 1908. Como veremos, el análisis desarrollado en este trabajo se encuentra en completa consonancia con las explicaciones conjuntistas modernas. Padoa (1908) proporciona la siguiente definición de abstracción para áreas de polígonos planos:

(Área) Si a y b son polígonos planos, entonces ‘el área de a ’ = ‘el área de b ’ si y solo si a y b son equivalentes (i.e., equidecomponibles).

Padoa nota que la expresión que se define aquí es “área de a = área de b ”; por lo tanto, esta definición no fija ni el significado de la función “área de” ni el significado del término “área”.¹¹ Ello puede conseguirse, en cambio, si se proporciona una definición explícita de ‘la abstracción de a con respecto a R ’, donde R es la mencionada relación de equidescomposición. Padoa lo aclara en el siguiente importante pasaje:

11 Padoa (1908, p. 97).

Definición: Si K es una clase y R una relación equiforme¹² sobre K y a es un elemento arbitrario de K , entonces “abstracción de a con respecto a R ” significa “el conjunto de todos y solo aquellos K que están en la relación R con a ”.

Por ejemplo: si a es un *polígono*, entonces “*abstracción* de a con respecto a la relación *es equivalente* (i.e., es equidescomponible) a a ” es “el conjunto de todos y solo aquellos polígonos x tales que x es equivalente a a ”.

Luego, mostramos lo siguiente:

Teorema II: Si K es una clase sobre la que R define una relación equiforme y si a y b están en K , entonces (por brevedad, indicando Fa y Fb como las abstracciones de a y b con respecto a R): “ $Fa = Fb$ ” sí y sólo sí “ aRb ”. (Padoa 1908, p. 100. Citado por Mancosu 2016, p. 106)

Es oportuno realizar una serie de comentarios. En primer lugar, encontramos aquí de manera explícita una definición de la magnitud ‘el área de a ’, donde a es un polígono, como la clase de equivalencia de a con respecto a la relación geométrica de equidescomposición. En segundo lugar, Padoa muestra que si se adopta la definición explícita anterior de ‘abstracción’ y se asume que R es una relación de equivalencia, entonces la definición de abstracción original puede ser demostrada como un teorema. En tercer lugar, la definición anterior del área de un polígono a como la clase de equivalencia determinada por éste permite ofrecer también una definición en términos conjuntistas de este *tipo* o *especie* de magnitud geométrica, a saber: si A es el conjunto de todos los polígonos planos, el término ‘área’ es el conjunto cociente A/R determinado por la relación geométrica de descomposición R , es decir, el conjunto formado por todas las clases de equivalencia.

En resumen, el método de las definiciones por abstracción proporciona un fundamento lógico preciso para la concepción de las magnitudes geométricas como propiedades o atributos de los objetos geométricos obtenidos por medio de un proceso (lógico) de abstracción. El paso siguiente en nuestra discusión será analizar cómo esta concepción abstraccionista se vincula con la teoría axiomática (abstracta) de magnitudes, esto es, con el conjunto de axiomas o principios que caracteriza en términos algebraicos el concepto de magnitud general o abstracta. Nos ocuparemos de este problema a continuación.

La teoría axiomática estándar de las cantidades y magnitudes extensivas

En la sección anterior, hemos visto que hacia fines del siglo XIX y comienzos del siglo XX es posible encontrar las primeras definiciones rigurosas de las magnitudes geométricas basadas en el método de abstracción matemática, a saber: dado un conjunto de objetos o entidades geométricas (segmentos, figuras rectilíneas planas, poliedros, etc.), una clase o tipo de magnitud se define como el conjunto cociente en la que dicho conjunto queda particionado bajo

12 Padoa introduce el término ‘equiforme’ (*equaliforme*) para referirse a las relaciones de equivalencia.

una determinada relación de equivalencia, descrita en términos estrictamente geométricos; asimismo, la ‘magnitud’ de un determinado elemento x de dicho conjunto, se identifica con la clase de equivalencia de x o, en símbolos, $[x]$. Ahora bien, durante este período, también surgieron las primeras axiomatizaciones abstractas o formales de las cantidades extensivas, que contribuyeron a identificar este concepto central—siempre impregnado de connotaciones filosóficas—con una estructura algebraica precisa, dotándolo así de una nueva base matemática sólida. Entre los trabajos más importantes se encuentran Stolz (1885), Hölder (1901) y Huntington (1902). En términos modernos, estas axiomatizaciones caracterizan el concepto de cantidad extensiva como *un semigrupo ordenado conmutativo (o abeliano)*.¹³ Un aspecto importante es que, en estas primeras axiomatizaciones, la distinción entre cantidades y magnitudes extensivas no era por lo general explicitada adecuadamente. Sin embargo, una explicación precisa de esta distinción se encuentra en el trabajo clásico de Suppes (1951), quien presenta una axiomatización denominada la “teoría estándar de las cantidades extensivas”. Una presentación esquemática de la teoría de Suppes resulta útil para la discusión que sigue.

Consideremos el sistema conformado por el triple ordenado $\langle K, \preceq, \oplus \rangle$, donde K es un conjunto no vacío de elementos arbitrarios $x, y, z \dots$, $\preceq$ es una relación binaria definida sobre K , y $\oplus$ es una función binaria definida sobre K . Decimos que un sistema $\langle K, \preceq, \oplus \rangle$ es un *sistema de cantidades extensivas* si satisface los siguientes axiomas:

- A.1** Si $x, y, z \in K$, y $x \preceq y$ e $y \preceq z$, entonces $x \preceq z$. Escriba aquí la ecuación.
- A.2** Si $x, y \in K$, entonces $x \oplus y \in K$.
- A.3** Si $x, y, z \in K$, entonces $(x \oplus y) \oplus z \preceq x \oplus (y \oplus z)$.
- A.4** Si $x, y, z \in K$ y $x \preceq y$, entonces $x \oplus z \preceq y \oplus z$.
- A.5** Si $x, y \in K$ y $\neg(x \preceq y)$, entonces existe $z \in K$ tal que $x \oplus z \preceq y$ y $y \oplus z \preceq x$.
- A.6** Si $x, y \in K$, entonces $\neg(x \oplus y \preceq x)$.
- A.7** Si $x, y \in K$ y $(x \preceq y)$, entonces existe un número natural n tal que $y \preceq nx$.¹⁴

Es claro que la relación binaria ‘ $\preceq$ ’ puede ser interpretada como una relación de *orden*, mientras que la función binaria ‘ $\oplus$ ’ como una operación de *adición*. Así, **A.1** establece que la relación de orden ‘ $\preceq$ ’ es transitiva, mientras que **A.2** afirma que K es cerrado bajo la operación de adición ‘ $\oplus$ ’. Asimismo, **A.3** asegura que la adición ‘ $\oplus$ ’ asociativa, **A.4** que la relación de orden es compatible con la adición y **A.5** establece una condición de comparabilidad para los elementos de K . Por último, **A.6** es conocido usualmente como principio

13 Un *semigrupo ordenado conmutativo (o abeliano)* es una estructura $(G, +, <)$ tal que: $+$ es una operación asociativa y conmutativa sobre G , $<$ es un orden (parcial o total) sobre G , y el orden es compatible con la operación $+$, es decir, se cumple la condición $a < b \Rightarrow a + c < b + c$ para todo $a, b, c \in G$.

14 La multiplicación de un elemento x de K por un entero n se define recursivamente del modo usual: $1x = x$ y $nx = n - 1x \oplus x$.

(o ley) de dominación para la adición, mientras que A.7 es la versión estándar del axioma de Arquímedes. De estos axiomas se obtienen fácilmente las propiedades habituales de las cantidades, como por ejemplo la conmutatividad de la adición (i.e., $x \oplus y \preceq y \oplus x$.) y la ley de monotonicidad de la adición con respecto al orden (i.e., si $x \preceq y$ e $u \preceq w$ entonces $x \oplus u \preceq y \oplus w$).

Ahora bien, si se adopta una concepción abstraccionista, donde las magnitudes (extensivas) resultan definidas como ciertas clases de equivalencias de cantidades (extensivas), entonces los axiomas anteriores permiten desarrollar un sistema de magnitudes de un modo simple e inmediato. Veamos de un modo esquemático este procedimiento.¹⁵

La relación definida como el producto lógico de ' $\preceq$ ' y su inversa satisface las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva, es decir, es una relación de equivalencia. Designamos entonces con el símbolo ' $\approx$ ' a la relación de equivalencia de los elementos de K definida de la siguiente manera:

$$x \approx y =_{\text{def}} (x \preceq y) \text{ y } (y \preceq x).$$

Como hemos visto antes, la relación de equivalencia ' $\approx$ ' define una partición de K , esto es, un conjunto de subconjuntos disjuntos y mutuamente excluyentes de K , cuya unión da como resultado K (en símbolos, nos referimos a esta partición como $\frac{K}{\approx}$). Del mismo modo, la clase de equivalencia a la que pertenece determinado elemento x de K (es decir, el conjunto cociente $\frac{x}{\approx}$) la designamos, en símbolos, como $[x]$. La relación $\approx$ cumple con la ley de sustitución con respecto a la relación de orden $\preceq$ y a la operación de adición $\oplus$, esto es, de los axiomas y teoremas básicos de las cantidades extensivas se sigue casi trivialmente que: (i) si $x \approx y$ y $y \preceq z$, entonces $x \preceq z$; (ii) si $x \approx y$ y $u \approx w$, entonces $x \oplus u \approx y \oplus w$.¹⁶ Luego, estas leyes nos permiten utilizar las relaciones de ordenación y la adición de cantidades para comparar y sumar las magnitudes correspondientes. Más precisamente, podemos definir una relación de orden ' $\leq$ ' y una operación de adición '+' en $\frac{K}{\approx}$ de la siguiente manera:

- (i) $[x] \leq [y]$ si y sólo si $x \preceq y$.
- (ii) $[x] + [y]$ es la clase de equivalencia (módulo $\approx$) que consiste en todos los elementos en K que están en la relación $\approx$ (i.e., equivalentes) con el elemento $x \oplus y$.

En resumidas cuentas, cuando $M = \langle K, \preceq, \oplus \rangle$ es un sistema de cantidades extensivas, $M/\approx = \langle K/\approx, \leq, + \rangle$ es el sistema de clases de equivalencia (o conjunto cociente) de M módulo $\approx$. Llamamos a $M/\approx$ un sistema de magnitudes extensivas. Dada esta definición de un sistema de magnitudes extensivas, y la respectiva relación de orden y operación de adición, los axiomas y teoremas básicos de las cantidades extensiva permiten

¹⁵ Seguimos aquí el trabajo de Suppes (1951) en la definición axiomática de un sistema de magnitudes extensivas.

¹⁶ Podemos pensar en la ley de sustitución (ii) como la versión formal de la Noción Común 2 (NC2) de Euclides: "Y si se añaden cosas iguales a cosas iguales, los totales son iguales".

demostrar de un modo relativamente directo que el sistema de magnitudes posee la estructura algebraica esperable, a saber: la de un semigrupo ordenado conmutativo (o abeliano), que no posee un elemento neutro respecto de la adición (i.e., un cero) y que es cerrado bajo la sustracción de elementos ‘menores’ de elementos ‘mayores’.¹⁷ Luego, además de clarificar la estructura algebraica del concepto de magnitud, esta caracterización axiomática articula de un modo preciso la concepción abstraccionista de las magnitudes y el procedimiento por el cual este concepto se obtiene a partir de un sistema de cantidades (extensivas). En el caso particular de las magnitudes geométricas, esta explicación permite abordar interesantes problemas metodológicos y fundacionales, en particular en relación con la búsqueda de un fundamento estrictamente sintético o ‘puro’ para la geometría elemental. A continuación, nos ocuparemos de analizar brevemente esta significación filosófica de la concepción abstraccionista de las magnitudes geométricas.

Pureza y abstracción en la geometría axiomática moderna

Como lo señala Hilbert en la última sección de *Fundamentos de la geometría* (1899), el requerimiento o demanda de la ‘pureza del método’ [*Reinheit der Methode*, en alemán] fue una preocupación metodológica muy importante en la matemática de la segunda mitad del siglo XIX. En términos generales, este requerimiento refiere al problema de si los métodos o recursos utilizados en la demostración de un teorema, o en la solución de un problema, son apropiados o adecuados para el teorema o problema en cuestión. Ejemplos típicos de las preocupaciones por la pureza del método durante este período son la eliminación de consideraciones geométricas de los fundamentos de la aritmética y el análisis, la búsqueda de una construcción autónoma de la geometría proyectiva que evite el empleo de nociones métricas, y el desarrollo de la geometría plana con independencia de consideraciones espaciales. Luego, en el contexto de sus investigaciones metageométricas sobre el teorema clásico de Desargues en la geometría elemental, Hilbert propuso la siguiente formulación estándar de pureza:

Nos encontramos por tanto por primera vez en la posición de llevar a la práctica una crítica de los medios de una demostración [*die Hilfsmittel eines Beweises*]. En la matemática moderna tal crítica es realizada muy a menudo, donde el objetivo es preservar la pureza del método, i.e., en la demostración de un teorema se deben utilizar, en la

17 Como se habrá notado, en la caracterización axiomática de Suppes (1951) se incluye el principio de Arquímedes, de donde se sigue que el semigrupo es también arquimideano. En las primeras axiomatizaciones del concepto de magnitud, se solía distinguir entre sistemas de magnitudes (en donde este principio no era necesariamente asumido) y sistemas de magnitudes “absolutas”, que satisfacían el axioma de Arquímedes. Véase, por ejemplo, Stolz (1885). Para una caracterización axiomáticamente del concepto de magnitud en términos de clases de equivalencia de cantidades (extensivas), es decir, para una concepción abstraccionista, el axioma de Arquímedes no resulta, en rigor, una condición necesaria. Para más detalles, véase Giovannini et al. (2024).

medida de lo posible, sólo aquellos medios que son sugeridos [*nahe gelegt*] por el contenido del teorema. (Hilbert 1898/1899, pp. 315–136)

De acuerdo con esta formulación, una demostración es pura si los métodos o recursos utilizados pertenecen intrínsecamente o son inherentes al teorema demostrado o al problema resuelto, es decir, si los métodos son sugeridos por el “contenido” de la proposición que se está considerando. Arana y Detlefsen (2011) proponen el término “pureza tópica” para designar esta concepción, según la cual los medios de demostración deben restringirse al *contenido* de los teoremas o problemas.¹⁸ De manera esquemática, la idea de un tópico matemático se refiere al contexto particular en el que se formulan los teoremas, que incluye definiciones, axiomas, vocabulario primitivo o conceptos, inferencias, etc.; el contenido de un enunciado matemático o un teorema está intrínsecamente ligado a un tópico matemático específico. Así, por ejemplo, la utilización de técnicas analíticas o algebraicas para demostrar un teorema en la geometría sintética produce una demostración tópicamente impura. El requerimiento de la pureza del método constituye así un *ideal* de demostración.

Ahora bien, este requerimiento metodológico también fue central en las primeras axiomatizaciones modernas o ‘abstractas’ de la geometría euclídea elemental, especialmente en la tradición sintética, cuya instancia más influyente fue sin duda el mencionado trabajo de Hilbert (1899). Un objetivo fundamental de estas axiomatizaciones ‘estrictamente sintéticas’ consistía en proporcionar una nueva base independiente para la geometría euclídea elemental, removiendo de sus fundamentos no sólo las suposiciones numéricas sino también toda dependencia de principios de continuidad, especialmente el axioma de Arquímedes. Ello implicó una reformulación substancial de partes centrales de esta teoría geométrica, tales como la teoría clásica de las proporciones, la semejanza y el área de las figuras rectilíneas planas, en donde no sólo se buscaba eliminar la dependencia del aquel axioma sino también la utilización *tácita* de consideraciones numéricas. En efecto, una posición ampliamente compartida en este período señalaba que el tratamiento clásico de la proporcionalidad geométrica, la semejanza y el área poligonal descansaba, aunque de manera tácita, en un fundamento *aritmético* más que en uno geométrico. H. Grassmann formuló esta crítica con mucha claridad en el siguiente pasaje de su *Ausdehnungslehre* de 1844:

Un defecto esencial de las presentaciones anteriores de la geometría es que se suele volver a relaciones numéricas discretas en el tratamiento de la teoría de la semejanza. Este procedimiento (...) se enreda muy pronto en complicadas investigaciones relativas a magnitudes inconmensurables. (...) Ciertamente, no se puede eliminar el problema de

18 Sobre la noción de ‘contenido’ utilizada para definir el requerimiento de la pureza del método que opera en las discusiones de pureza, véase Arana y Mancosu (2012).

medir magnitudes espaciales y expresar numéricamente los resultados de estas mediciones (...) Relegar la teoría de la semejanza, e incluso la del área plana, a esta rama como ha ocurrido anteriormente (no a la forma sino al fondo) es robar el contenido esencial a lo que se llama geometría (pura). (Grassmann 1995, §74)

Una suposición fundamental sobre la que se apoyaban las críticas a las teorías clásicas de las proporciones y el área plana era así una concepción métrica (informal) de las magnitudes geométricas, donde éstas resultaban identificadas con sus *medidas expresadas numéricamente*. El carácter ‘informal’ de esta concepción métrica residía en que en los tratados de geometría elemental incluso hasta fines del siglo XIX era habitual *simplemente identificar* la magnitud de un objeto geométrico con el *número* que expresaba su medida.¹⁹ Pero si las magnitudes (geométricas) son números, entonces la identidad de razones entre magnitudes podía ser simplemente entendida como la igualdad entre dos razones numéricas, y las teorías clásicas de las proporciones y la semejanza descansaban así implícitamente el concepto de número irracional. Lo mismo podía decirse de la teoría del área plana, en tanto que al identificar el área de una figura poligonal con un número real (positivo), las operaciones y la comparación de esta magnitud geométrica se reducían a operaciones y comparaciones entre números. Por lo tanto, un objetivo central vinculado con la demanda de la pureza del método en las primeras axiomatizaciones abstractas de la geometría euclídea elemental consistió en remover las consideraciones y supuestos numéricos que estaban implícitos en el estudio de las magnitudes geométricas.

El método de la abstracción matemática permitía luego evitar esta referencia a consideraciones numéricas en el tratamiento de las magnitudes geométricas, en cuanto estas eran obtenidas por medio de una ‘abstracción’ sobre un conjunto de cantidades geométricas (i.e., objetos) a partir de una relación de equivalencia descripta en términos estrictamente geométricos, como por ejemplo la congruencia de segmentos o la equidescomposición de polígonos planos. Más precisamente, el modo habitual de entender el resultado de esta abstracción en geometría (sintética) era como una clase de equivalencia. Más importante aún, esta concepción abstraccionista permitía del mismo modo sortear la apelación a consideraciones numéricas en la comparación y las operaciones de magnitudes geométricas, puesto que las operaciones (especialmente, la adición) y el orden de una especie particular de magnitudes se reducen a las operaciones y el orden entre la respectiva clase de *cantidades*. Por ejemplo, dados dos polígonos planos **P** y **Q**, decimos que el *área* de **P** es menor que el *área* de **Q** si y solo si **P** es menor que **Q** (en símbolos, $[P] < [Q]$ $P < Q$), donde esta última

19 Por el contrario, desde una perspectiva moderna, esta concepción métrica supone la definición de una *función de medida* que asigna a cada clase de objeto geométrico un número real (positivo) relativa a una unidad de medida dada. En otras palabras, la concepción métrica supone que se pueda utilizar el conjunto de los números reales (positivos) para expresar relaciones geométricas.

relación es definida en términos estrictamente geométricos.²⁰ De la misma manera, la suma del área de **P** y el área de **Q** se define como el conjunto de todos los polígonos planos que son equidescomponibles con el polígono **P + Q** (i.e., como la clase de equivalencia determinada por el elemento **P + Q** módulo equidescomposición). En suma, el método de abstracción podía contribuir de un modo significativo a la búsqueda de un nuevo fundamento ‘puro’ o ‘estrictamente sintético’ para la geometría euclídea elemental, en tanto que permitía evitar la intromisión de consideraciones numéricas en el tratamiento de las diferentes clases de magnitudes geométricas.

Es importante mencionar que la adopción de una concepción abstraccionista de las magnitudes determinó problemas fundacionales relevantes a la hora de llevar a cabo una axiomatización estrictamente sintética de la geometría euclídea elemental. En términos generales, estos problemas se refieren a la relación fundacional entre los nuevos axiomas para la geometría y la teoría axiomática abstracta de las magnitudes.²¹ Otto Hölder, uno de los pioneros en la axiomatización del concepto de magnitud extensiva o medible, sintetizó estos problemas de la siguiente manera:

La teoría de las magnitudes medibles se aplica del mismo modo a la comparación y adición de tiempo, masa, segmentos de línea y área [*Inhalt*]. Sin embargo, para evitar de inicio cualquier malentendido, hago notar que los axiomas de la teoría de las magnitudes no se presupondrán para la geometría en la forma aquí presentada, aplicándolos a los segmentos de línea y al área. Por el contrario, los axiomas de la teoría de las magnitudes medibles que satisfacen los segmentos de recta se derivan de los axiomas puramente geométricos para puntos y segmentos de recta. (Hölder 1901, p. 231)

Brevemente, un criterio de adecuación fundamental para las nuevas axiomatizaciones modernas de la geometría euclídea consistía en que debía poder *demostrarse* a partir de los axiomas geométricos propuestos que los objetos geométricos relevantes (segmentos lineales, figuras rectilíneas planas, sólidos, etc.) constituían o determinaban clases o especies de cantidades extensivas. Es decir, un aspecto central de estas axiomatizaciones modernas *à la* Hilbert consistía en demostrar que los axiomas propuestos permitían derivar los axiomas generales de magnitudes. Ello se lograba al convertir dichos principios en proposiciones

20 Por ejemplo, en el caso de los polígonos planos, usualmente esta relación de orden se define de la siguiente manera: dados dos polígonos planos **P** y **Q**, $P < Q$ si y solo si existe otro polígono plano **Q'** contenido *propriadamente* en **Q** tal que **P** y **Q'** son equidescomponibles.

21 Es importante destacar que en las primeras axiomatizaciones abstractas del concepto de magnitud, como por ejemplo la de Hölder (1901), la distinción que hemos trazados entre magnitudes y cantidades no era advertida tan claramente. Esta confusión no solo era de carácter conceptual, sino que planteaba también algunos problemas técnicos relevantes. Por ejemplo, en estos sistemas, la relación designada por el símbolo '=' no era axiomatizada – i.e., no designaba una relación matemática – sino que era tratada como la relación de identidad lógica.

geométricas, interpretando las relaciones y operaciones de magnitudes como relaciones y operaciones geométricas específicas para cada tipo relevante de cantidad geométrica. Naturalmente, esta exigencia impuso restricciones metodológicas estrictas en el proceso de axiomatizar la geometría euclídea, en tanto que no resultaba admisible que propiedades fundamentales de las cantidades geométricas, como por ejemplo la transitividad de la relación de congruencia de segmentos, sean postuladas como un axioma. Por último, un problema relacionado consistió en cómo podían definirse de un modo riguroso y *estrictamente geométrico* las operaciones y relaciones de cantidades geométricas más complejas que los segmentos como, por ejemplo, las figuras rectilíneas planas. En este caso particular, las definiciones usuales de ‘adición’ como yuxtaposición de un par de figuras en un lado común, tenía como consecuencia que la operación no era cerrada sobre el conjunto de los polígonos (simples) en el plano; es decir, no satisfacía el axioma A.2 de Suppes (1951). La resolución de este problema ha motivado recientemente interesantes discusiones filosóficas en el marco de la teoría abstracta de magnitudes.²²

Consideraciones finales

El objetivo central de este trabajo ha sido explorar la relevancia del abstraccionismo matemático para la filosofía de la geometría. Con este fin, nos hemos concentrado en los fundamentos de la geometría euclídea elemental. Uno de los puntos de partida de nuestra investigación fue la idea de que, aplicada al contexto geométrico, la perspectiva abstraccionista no debe entenderse necesariamente como un proyecto de reducción de la matemática a la lógica, tal como ocurre en las posiciones logicistas clásicas de Frege y Russell y, más recientemente, en las distintas variantes del programa neologicista. Por el contrario, nuestra premisa central ha sido que el método de abstracción constituye una herramienta fecunda para ofrecer una explicación filosófica sistemática de algunos de los problemas fundamentales de la ontología, la epistemología y la semántica de las matemáticas.

En este sentido, hemos identificado una aplicación particularmente relevante del método de abstracción matemática en los fundamentos modernos de la geometría euclídea, especialmente en su formulación “sintética”, a saber: en la introducción del concepto central de ‘magnitud geométrica’. En pocas palabras, en nuestro breve recorrido histórico hemos sugerido que una de las transformaciones conceptuales más profundas que tuvo lugar con las primeras axiomatizaciones modernas de la geometría euclídea a comienzos del siglo XX -- en contraste con la geometría del siglo XIX -- fue la transición de una concepción métrica e informal de las magnitudes geométricas a una *concepción abstraccionista rigurosa*. De acuerdo con esta concepción, un tipo o clase de magnitud geométrica puede obtenerse por abstracción sobre un sistema de cantidades geométricas -- es decir, sobre objetos geométricos concretos -- a partir de una relación de equivalencia definida

22 Un panorama global de estas discusiones puede verse en Giovannini et al. (2024).

en términos estrictamente geométricos. Esta concepción abstraccionista contribuye, de este modo, a la búsqueda de un fundamento autónomo o independiente para la geometría euclídea, en la medida en que hace prescindible la apelación a los números reales en el estudio de las distintas clases de magnitudes geométricas. La concepción abstraccionista de las magnitudes resulta, por ello, especialmente relevante para las discusiones sobre la “pureza del método” en la práctica matemática.

Nuestro estudio de la concepción abstraccionista de las magnitudes geométricas tiene, sin embargo, un carácter preliminar. En particular, muchos de los desafíos centrales del abstraccionismo matemático pueden formularse también en este contexto. Concluimos este trabajo mencionando brevemente uno de ellos, como indicación para futuras investigaciones. La interpretación del valor del operador o función de abstracción constituye un punto medular del abstraccionismo. Entre las alternativas más habituales, se encuentran o bien las propias clases de equivalencia, o bien un objeto nuevo *sui generis*, de naturaleza diferente al dominio sobre el que se abstrae, como valores de la abstracción. Sin embargo, en el caso que hemos estudiado, ambas posibilidades enfrentan sus propios problemas. Por un lado, si se entiende por un fundamento “puro” que la geometría debe evitar la introducción de conceptos ajenos o extraños a la teoría, la primera de estas opciones resulta problemática, puesto que difícilmente puede afirmarse que la noción de clase de equivalencia sea una idea estrictamente geométrica.²³ Por otro lado, considerar a las magnitudes geométricas como una nueva clase de objetos *sui generis*, distinta de las cantidades geométricas, tiene implicancias fundamentales para los compromisos ontológicos de las teorías geométricas. Las discusiones actuales sobre la metafísica de las magnitudes constituyen un campo prometedor para comprender mejor estas implicancias ontológicas del abstraccionismo matemático en geometría.²⁴

23 Dicho de otro modo, si bien en el caso analizado la introducción de las distintas clases de magnitudes geométricas se lleva a cabo sobre la base de relaciones de equivalencia sobre objetos geométricos concretos definidas en términos estrictamente geométricos, sigue siendo legítimo preguntarse si ello basta para considerar esta estrategia como más adecuada que la estrategia “métrica” habitual en lo que respecta al requerimiento de la pureza del método. Este problema es demasiado amplio para ser tratado aquí y se lo reserva para un trabajo futuro.

24 En particular, la idea de los “objetos delgados” (*thin objects*), desarrollada por Linnebo (2018) como una ontología minimalista de los objetos matemáticos basada en el método de abstracción, resulta especialmente atractiva para reexaminar el problema de la pureza en geometría.

Bibliografía

- Arana, A. y Detlefsen, M. (2011). Purity of Methods. *Philosophers' Imprint*, 11(2), 1–20.
- Arana, A. y Mancosu, P. (2012). On the relationship between plane and solid geometry. *The Review of Symbolic Logic*, 5(2), 294–353.
- Błaszczuk, P., and A. Petiurenko. 2019. Euclid's Theory of Proportion Revised. *Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis. Studia ad Didacticam Mathematicae Pertinentia*, 11, pp. 37-62.
- Boccuni, F. y Zannetti, L. (2024). *Abstractionism*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Burali-Forti, C. (1894). *Logica Matematica*. Milano: Hoepli.
- Dedekind, R. (1998). *¿Qué son y para qué sirven los números? Y otros escritos sobre los fundamentos de la matemática*. Edición e introducción a cargo de José Ferreirós. Madrid: Editorial Alianza.
- Ebert, P. & Rossberg, M. (Ed.) (2016). *Abstractionism. Essays in Philosophy of Mathematics*. Oxford: Oxford University Press.
- Grassmann, H. (1844). *Die Lineale Ausdehnungslehre*. Leipzig: Teubner.
- Grassmann, H. (1995). *A New Branch of Mathematics. The Ausdehnungslehre of 1884 and Other Works*. Editado y traducido al inglés por L. C. Kannenberg, Chicago: Open Court.
- Frege, G. (1884). *Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*, Breslau: Koebner.
- Frege, G., (1893/1903). *Grundgesetze der Arithmetik*. 2 volúmenes. Jena: H. Pohle.
- Giovannini, E., Haeusler, H. y Lassalle Casanave, A. (2024). *The Theory of Plane Area at the Crossroads. Philosophical, Historical, and Logical Perspectives*. New York: Springer.
- Hilbert, D. (1971). *Foundations of Geometry*. La Salle, Estados Unidos: Open Court. Traducción de L. Unger de la décima edición alemana.
- Hale, B. & Wright, C. (2001). *The Reason's Proper Study. Essays towards a Neo-Fregean Philosophy of Mathematics*. Oxford: Oxford University Press.
- Hellman, G. and S. Shapiro (2018). *Varieties of Continua. From Regions to Points and Back*. Oxford University Press.
- Hilbert, D. (1971). *Foundations of Geometry*. La Salle: Open Court. Translated by L. Unger from the 10th German Edition.

- Hölder, O. (1901). Die Axiome der Quantität und die Lehre vom Mass. Berichten der mathematisch-physischen Classe der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, 53, 1-64.
- Linnebo, O. (2018). *Thin Objects. An Abstractionist Account*. Oxford: Oxford University Press.
- Huntington, E. (1902). A Complete Set of Postulates for the Theory of Absolute Continuous Magnitude. *Transactions of the American Mathematical Society*, 3(2), 264-279; (3), 280-284.
- Malet, A. (2006). Renaissance notions of number and magnitude. *Historia Mathematica*, 33, 63-81.
- Mancosu, P. (2016). *Abstraction and infinity*. Oxford, Reino Unido: Oxford University Press.
- Padoa, A. (1908). Dell'astrazione matematica. En *Questioni Filosofiche*, Modena: Formignini, 91-104.
- Peacocke, C. (2019). *The Primacy of Metaphysics*. Oxford: Oxford University Press.
- Peano, G. (1888). *Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann*, Torino: Bocca.
- Peano, G.. (1894). *Notations de Logique Mathematique. Introduction au Formulaire de mathematique*. Torino: Bocca.
- Stein, H. (1990). Eudoxos and Dedekind: on the ancient Greek theory of ratios and its relation to modern mathematics. *Synthese*, 84, 163-211.
- Stolz, O. (1885). *Vorlesungen uber allgemeine Arithmetik. Erster Theil: Allgemeines und Arithmetik der reellen Zahlen*. Leipzig: Teubner.
- Suppes, P. (1951). A Set of Independent Axioms for Extensive Quantities. *Portugaliae Mathematica*, 10, 163-172.
- Vailati, G. (1894). Recensione a C. Burali-Forti, *Logica Matematica. Rivista di Matematica*, IV, 143-146.