

LA NOTACIÓN CONCEPTUAL COMO LENGUAJE UNIVERSAL Y LA IDEA FREGEANA DE DEMOSTRACIÓN

GABRIELA FULUGONIO

Universidad de Buenos Aires. Facultad de Ciencias Económicas/CIECE
gabrielafulugonio@gmail.com

Resumen: *En este trabajo busco mostrar que la consecución de la tesis logicista exige a Frege ciertas modificaciones a la noción clásica de demostración que él mismo originalmente defiende. Para ello, tras una caracterización mínima de tal noción, me ocupo de ver cómo aparece en Begriffsschrift (1879), a raíz de la preocupación fregeana por la confiabilidad de las demostraciones matemáticas. Luego analizo la relación que hay entre el lenguaje que Frege diseña (la notación conceptual o, como también se ha traducido, conceptografía) y el fin que persigue de suplir las falencias que otros lenguajes como el natural, el de la aritmética y otros sistemas lógicos presentan. Muestro cómo esto lo conduce de manera inevitable a una noción más cercana al formalismo, aunque siempre en el marco de una idea clásica de demostración al menos respecto de la preocupación por el aspecto epistémico. El asunto atañe al espinoso problema de la ampliación del conocimiento en las demostraciones deductivas. En la conclusión conecto estos resultados con la idea de lógica subyacente que Frege defiende.*

Palabras clave: *logicismo, definiciones analíticas, demostración, lenguaje de la aritmética, notación conceptual.*

Abstract: *In my contribution I sought to show that Frege is obliged to logicism for certain changes to the classic notion of proof he originally defends. Henceforth, after a minimal characterization of such a notion, I will look after it in Begriffsschrift (1879) in order to show that it is in strong connection with fregean worry about confidence in mathematical proofs. Afterwards, I analyze the relationship between the language Frege designs (the Concept-script) and his goal of supplying the defects other languages as natural language, arithmetic language and other logic systems have. I show how this inevitably conducts him to a notion of proof which is nearer to formalism; although one is to concede he still defends a classic idea of proof, at least on regards of its epistemic aspect. This entire, close related with the so sharp augmentation of knowledge problem in deductive proofs. I end up with a switch between these results and the underlying idea of logic Frege himself supports.*

Keywords: *logicism, analytic definitions, proof, arithmetic language, conceptual notation.*

Introducción

La preocupación por la rigurosidad de las demostraciones matemáticas (y su consecuente confiabilidad) es sin duda una de las motivaciones originarias en la construcción del novedoso sistema simbólico propuesto por Gottlob Frege en (1879) *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens* [Bs.] /1/. Asimismo, en Bs. Frege presenta el programa que más tarde se dio a conocer por logicismo, según el cual las proposiciones aritméticas y la inducción matemática son de carácter analítico y pueden reducirse a nociones lógicas más primitivas. En su afán de oponerse a la tesis kantiana de que los juicios matemáticos son sintéticos a priori, Frege debía demostrar que las demostraciones matemáticas eran analíticas. Esto lo conduce a dar una caracterización precisa de *demostración*, uno de los aportes fregeanos más importantes para la historia de la lógica y matemática contemporáneas, y a ofrecer definiciones analíticas de los principios sobre los que derivará las leyes de la aritmética. Ahora bien, tampoco el concepto de analiticidad, pese a la fuerte discusión que tuviera en la modernidad, había sido claramente definido hasta el momento. Pero si, siguiendo la propuesta racionalista, las proposiciones matemáticas no se fundaban ni en intuiciones temporales, ni en intuiciones espaciales, entonces debían fundarse en un tipo de conocimiento extraempírico que tuviera que ver con las leyes del buen pensar, o sea la lógica. Por lo tanto, las definiciones de los principios de los que se derivarán las leyes de la aritmética serán analíticas siempre y cuando estén construidas solamente a partir de conceptos lógicos¹.

En este trabajo me interesa mostrar que el proyecto fregeano se apoya en una noción de demostración clásica que, en este sentido, se condice con el carácter epistemológico de su proyecto² pero que, en la medida en que Frege pretende llevarlo a cabo, tal noción se ve superada por la dificultad y complejidad intrínseca del proyecto mismo. Esto da lugar a una noción de demostración más centrada en lo formal, a pesar de las reservas de Frege por caracterizar a la lógica a partir de una noción de este tipo. De hecho, el interés de Hilbert y sus colaboradores por las demostraciones mismas (expresadas mediante derivaciones formales), y no meramente por el resultado al que se arriba (los teoremas), dio pie a un modo de presentar la lógica que derivó en una nueva disciplina: la teoría de la demostración o de la prueba. Aquí el acento está puesto en los pasos del razonamiento y la lógica es presentada como un conjunto de reglas de transformación, neutrales respecto del contenido³. En tanto que Frege es el pri-

1 Tal actitud reduccionista de la matemática hacia la lógica fue la actitud habitual de la época en los matemáticos interesados en cuestiones de fundamentación (cf., e. g., Legris 2012, pp. 264–6). Aunque debe decirse también que en un comienzo, por ejemplo en Jevons 1874, encontramos dicha actitud “logicista” más relacionada con dar a la lógica un estatuto de ciencia autónomo, que con los problemas específicos de fundamentación de la matemática, de manera que se dejara de ver a la lógica como una parte especial de la matemática. Cf. Peckhaus 1999, pp. 444 –445.

2 A propósito del carácter epistemológico de la tesis logicista, cf. Zalta 2023, esp. pp. 30–32 y 37–39.

3 Para una concentrada reseña de la teoría de la demostración cf. Legris 1999. El artículo hace particular hincapié en la relevancia filosófica del sistema de deducción natural de Gentzen. En consonancia con la distinción que hago, el sistema

mero en caracterizar con precisión qué debía entenderse por demostración, es sin duda un antecedente ineludible de dicha disciplina. Pero Frege concebía, más bien, a la lógica como el estudio de las leyes más universales y generales, las que, en este sentido, tienen contenido pleno. Por ello, a pesar de que su aporte fue fundamental para la teoría de la demostración, el modo en que él concebía a la lógica está en las antípodas del modo en que se la concibió posteriormente según la escuela de Hilbert.

O sea, toda esta discusión supone una distinción de carácter conceptual entre dos maneras de concebir la idea de demostración deductiva. Para ello es importante tener en cuenta dos usos diferentes de la palabra “formal”⁴. Está claro que, en su sentido tradicional, por ejemplo, la validez de los silogismos aristotélicos es, por lo pronto, formal. Aún así, parto del hecho de que para Aristóteles esta validez formal es una condición necesaria para una demostración, pero no suficiente: la idea misma de demostración debía incluir factores de tipo epistémicos, tanto o más fundamentales en cuanto a la evaluación de la demostración que la validez formal, como veremos más adelante. Pero cuando en lo que sigue me refiera a demostraciones meramente formales o “más formales” pretendo aludir a la concepción propia de lo que se dio a llamar ‘teoría de la demostración’. Desde ya, no se trata de decir que las demostraciones según la primera idea no son demostraciones formales. Según la primera noción, las demostraciones tienen valor gnoseológico ya que permiten conocer los fundamentos de las verdades demostradas. Según la segunda, en cambio, el significado de los símbolos está dado por el sistema mismo y en eso consiste todo su valor epistémico: en ofrecer una semántica, en todo caso, contextual.

Presentada así la controversia general acerca de la idea de demostración, propongo en I una caracterización estándar de la noción clásica de demostración y reviso en I.1 qué ideas aparecen en relación a ello en la *Conceptografía* [Bs.]. Luego, en II me concentro en el impacto que tuvo la notación conceptual en la idea fregeana de demostración. En II.1 incurso en “Sobre la justificación científica de una conceptografía”, un texto escrito en 1882 en donde Frege, entre otras cosas, puntualiza las ventajas de un lenguaje escrito y artificial. En II.2, me detengo en algunas ideas que aparecen en Bs. al momento de construir este nuevo sistema simbólico y que vehiculizan una modificación en la idea clásica de demostración. Finalmente, en III, concluyo que es la exigencia de explicitar todos los recursos a utilizar en las demostraciones, pero fundamentalmente la exigencia de que éstos sean puramente lógicos, lo que aleja a Frege de la noción clásica de demostración. Conecto este resultado con una breve reflexión acerca de la idea subyacente de lógica que Frege defiende.

de Gentzen es presentado como una culminación de la tradición formalista, en tanto que presenta a la lógica como un conjunto de reglas de inferencias primitivas, a saber, reglas de introducción y eliminación para cada conectivo.

4 Volker Peckhaus me alertó sobre el problema de oponer la “idea clásica de demostración” a la “idea formal de demostración”. Mi intención no es dar aquí definiciones precisas de cada uno de estos usos de la palabra “formal” aludidos sino sencillamente, a la manera fregeana, inducir a lector a que vea y acepte la diferencia, aunque tal vez sea preferible hablar de una noción clásica de demostración frente a una noción *formalista*.

I. La idea clásica de demostración

En los *Analíticos Posteriores* (*An. Post.* 71b9–72a7) Aristóteles definía a la *demostración* como un razonamiento científico que, en tanto tal, proporciona auténtico conocimiento. Según él, las premisas de un razonamiento deben ser i) verdaderas, ii) indemostrables, iii) más inteligibles y anteriores que la conclusión, iv) “causa” de la conclusión (cf. Ross 1957, p. 68). Como escapa a mi objetivo trazar un delineamiento del impacto y desarrollo histórico que tuvo esta noción, pero en cambio me interesa el uso que hace de ella Gottlob Frege, resaltaré del siguiente modo sus rasgos principales.

Una demostración es un conjunto de enunciados que observan una particular ordenación según formen parte de cada uno de los siguientes subconjuntos:

- i) premisas: enunciados que se aceptan sin demostración, para los que vale la caracterización aristotélica de “verdaderos”;
- ii) enunciados intermedios: enunciados que se siguen lógicamente de enunciados anteriores;
- iii) conclusión: aquel enunciado particularmente interesante hacia el cual están orientados todos los enunciados anteriores, los que constituyen de esta manera su fundamento, siendo las premisas el fundamento último⁵.

Resumiendo, se trata de un texto finito que consta de un conjunto de premisas ($\alpha_1, \dots, \alpha_n$), una conclusión (β) y una línea deductiva de discurso entre ellas que hace saber la necesidad de la conclusión a quien la reconozca y, además, asuma las premisas. La demostración clásica envuelve, por ende, por lo menos dos dimensiones: i) una dimensión lógica, habida cuenta de que β se sigue lógicamente de $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ y ii) una dimensión epistémica, al tratarse de una prueba que da a conocer no sólo la razón de que algo sea el caso sino la imposibilidad de lo contrario⁶. En lo que sigue veremos en qué medida Frege sigue los lineamientos de la caracterización dada y cuáles son los motivos que lo apartan.

I.1. La idea (¿clásica?) de demostración en Frege

Salvo en sus *Escritos póstumos*, Frege no ofrece en ningún otro lugar de su obra una definición explícita de *demostración* a pesar de que el tema consume, sin duda, todos sus esfuerzos. Dado que sus *Escritos póstumos* son una suerte de compendio de sus ideas, en

5 De aquí se sigue que bajo esta concepción queden excluidas las deducciones a partir del conjunto vacío de premisas, más propias de la tradición que se inicia con posterioridad a Frege. No incursionaré en otros tipos de demostraciones en las que la conclusión no se siga necesariamente de las premisas.

6 Hay autores que mencionan también una dimensión pragmática bajo el supuesto de que una demostración lo es en tanto es hecha por alguien y su texto discursivo es reconocido socialmente como prueba. Cf., por ej., Vega (1997, pp. 49–50).

particular sobre lógica, veamos cómo define allí *demostración* para luego analizar ciertas referencias clave acerca del asunto en la *Conceptografía*.

Podemos decir que la demostración parte de *verdades reconocidas* y conduce por medio de cadenas de inferencias al teorema. (...) Una demostración no sólo debe *convencer de la verdad de lo demostrado*, sino que también debe *revelar las relaciones lógicas entre las verdades*. Por esta razón, Euclides demostró verdades que no parecen necesitar demostración alguna, ya que resultan evidentes sin ella. NS p. 220, (énfasis mío)⁷

Más adelante agrega:

La ciencia tiene la exigencia de demostrar todo aquello que se pueda demostrar y de *no descansar hasta que se tope con algo indemostrable*. NS p. 221, (énfasis mío)⁸

Hasta aquí, uno podría afirmar sin reservas el compromiso de Frege con la idea clásica de demostración. En una demostración se parte de *verdades reconocidas* (que se aceptan sin demostración) y por medio de una *cadena de inferencias* se llega al teorema. Ello otorga *auténtico conocimiento* ya que la demostración no sólo conduce a un conocimiento de la verdad demostrada (al *convencernos de su verdad*) sino que revela, además, *las relaciones lógicas entre las verdades* intermedias. Como vemos, están presentes todos los elementos de lo que hemos caracterizado como “la noción clásica de demostración” según la cual lo novedoso está no tanto en el orden de lo lógico-ontológico sino en el orden de lo epistémico. Es decir, las demostraciones (deductivas) no *dicen* nada que no esté *in nuce* en las premisas combinadas con nuestros modos de inferencia (ellos mismos considerados verdades universales), sino que *muestran* las conexiones de las distintas verdades entre sí, a la manera de un despliegue de los posibles distintos significados involucrados en los distintos enunciados básicos⁹.

7 Trad. españolas ofrecidas por Javier Legris en el Seminario de Posgrado a su cargo “El concepto lógico de demostración. Aspectos históricos y filosóficos”, que tuvo lugar en el I.E.C. (Universidad Nacional de Quilmes) en 2003. Corresponde a “Logik in der Mathematik”, texto presumiblemente escrito en la primavera de 1914 [Frege 1969, pp. 219–270].

„Wir können sagen, dass der Beweis, von anerkannten Wahrheiten ausgehend, durch Schlussketten zu dem Theoreme hinführt. (...) Der Beweis soll nicht nur von der Wahrheit des Bewiesenen überzeugen, sondern soll auch den logischen Zusammenhang der Wahrheiten untereinander aufdecken. Darum hat schon Euklid Wahrheiten bewiesen, die keines Beweises bedürftig erscheinen, weil sie ohne dies einleuchten.“ [Frege 1969, p. 220]

8 Ib. nota 8 a propósito de la versión en español y del texto original.

„Die Wissenschaft hat der Bedürfnis zu beweisen, was irgend zu beweisen ist, nicht eher zu ruhen, bis sie auf etwas Unbeweisbares gestossen ist.“ [Frege 1969, p. 221]

9 Tal la tesis, a grandes rasgos, que sostiene Brandom 1994 al abordar el problema más general, caro a la filosofía del lenguaje, acerca de la elucidación de significados. A pesar de la diferencia de escala, creo que su respuesta vale también para nuestro caso. Debo este paralelo a Oscar Esquisabel.

Tal como fue adelantado, el compromiso de Frege con esta noción de fuerte contenido epistémico está presente desde un primer momento. De hecho, el *Prólogo* de la *Conceptografía* comienza así:

El conocimiento de una verdad científica pasa, como regla, por varios grados de certidumbre. (...) por un lado se puede preguntar por el modo en que gradualmente se gana una proposición y por la otra, por la manera en que finalmente se la fundamenta con máxima firmeza. Acaso la primera cuestión sea contestada de modo diferente por diferentes hombres, la última es más definida y su respuesta se conecta con la naturaleza interna de la proposición considerada.

A propósito de que “el conocimiento de una verdad científica pasa, como regla, por varios grados de certidumbre” [„Das Erkennen einer wissenschaftlichen Wahrheit durchläuft in der Regel mehre Stufen der Sicherheit”] Frege distingue entre:

- i) el modo en que se logra conocer una proposición, cuestión “contestada de modo diferente por diferentes hombres” [„möglichlicherweise in Bezug auf verschiedene Menschen verschieden beantwortet”] (Frege 1879, p. IX)¹⁰ y
- ii) “la manera en que finalmente se la fundamenta con máxima certeza” [„[die] Weise, wie [der Satz] nun schliesslich am festesten zu begründen ist”] (Frege 1879, p. IX).

De inmediato, Frege orienta su interés hacia esta segunda cuestión, “más definida y [cuya] respuesta se conecta con la naturaleza interna de la proposición considerada” (Frege 1879, p.7) [„letztere ist bestimmter, und ihre Beantwortung hängt mit dem innern Wesen des betrachteten Satzes zusammen” (Frege 1879, p. IX)]. Para Frege cierto tipo de fundamentación se conecta íntimamente tanto con la cuestión epistemológica respecto del conocimiento en grado máximo de una proposición, como con su correlato ontológico. Según la última cita, la “manera en que se fundamenta una proposición con máxima certeza” está en estrecha correspondencia con “la naturaleza interna de la proposición considerada” [„dem innern Wesen des betrachteten Satzes zusammen”] (Frege 1879, p. IX). Las pruebas lógicas corresponden, por excelencia, a este tipo de fundamentación:

10 Éste es uno de los tantos lugares en donde se manifiesta, por decir lo menos, la falta de reconocimiento fregeano de la filosofía trascendental crítica y el consiguiente planteo psicologista de ciertos problemas frente a los cuales la filosofía crítica ofrece respuestas más elaboradas. Si bien diferentes personas logran conocer una proposición de diferentes maneras, las mismas no son puramente arbitrarias, tal como la cita sugiere. Por el contrario, ellas están acorde a cierta legalidad y a ciertas condiciones de posibilidad y son, por tanto, accesibles a una sistematización.

Es patente que la más firme es la prueba lógica pura, la cual prescindiendo de las características particulares de la cosa, sólo se funda en las leyes sobre las que descansa todo conocimiento. (Frege 1879, p.7)¹¹

No hay dudas de que Frege reconoce que hay distintos tipos de pruebas, pero de las que se va a ocupar es de aquéllas que permiten un convencimiento más firme. La tesis que defiende es que este mismo compromiso, sostenido con celo indeclinable al menos en el ámbito de la matemática, lo lleva a alejarse de la idea clásica de demostración. Lo que según la idea clásica de demostración era considerado indemostrable y, por lo tanto, aquello sobre lo que podían descansar las demostraciones, requiere para Frege, a propósito de la consecución de su proyecto, de demostración. Así, nos encontramos con que no solamente la línea deductiva debe ser lógica, sino también los puntos de partida. Esto impone nuevas exigencias al modo de demostración clásico, demasiado laxo tanto respecto de los puntos de partida como de los modos de deducción a utilizar, que al no estar explicitados de antemano permiten que se cuele elementos no lógicos. Bajo la concepción clásica una línea deductiva lo es en tanto y en cuanto sus pasos sean suficientemente evidentes, sea la evidencia en cuestión del tipo que fuere. Esta exigencia se estrechará en manos de Frege drásticamente. A pesar de que en ambos casos hay una preocupación por que los pasos sean finitos y comprensibles, la preocupación por lo epistémico (que implicaba el requisito de que la prueba en su totalidad fuera elucidatoria) pierde preponderancia, *pace* Frege, en aras de la pureza formal¹².

Resumiendo: Frege comparte con la idea clásica de demostración la preocupación por el aporte epistémico que una demostración conlleva. Para que tal sea el caso, entonces, una demostración debe partir de verdades previamente reconocidas y no, tomemos por caso, de pseudoaxiomas¹³. Pero se distancia de la idea de demostración clásica porque no comparte la idea, demasiado laxa, de evidencia propuesta tanto para los puntos de partida como para los pasos inferenciales.

11 „Die festeste Beweisführung ist offenbar die rein logische, welche, von der besondern Beschaffenheit der Dinge absehend, sich allein auf die Gesetze gründet, auf denen alle Erkenntnis beruht.“ (Frege 1879, p. IX)

12 Basta tan sólo con ver la deducción ofrecida en el § 15 y, con algunas explicaciones, más adelante en este texto. En simbología hoy más familiar se trata de lo siguiente:

$$\begin{array}{ll}
 a \rightarrow (b \rightarrow a) & \text{Axioma 1} \\
 (c \rightarrow (b \rightarrow a)) \rightarrow ((c \rightarrow b) \rightarrow (c \rightarrow a)) & \text{Axioma 2} \\
 ((c \rightarrow (b \rightarrow a)) \rightarrow ((c \rightarrow b) \rightarrow (c \rightarrow a))) \rightarrow ((b \rightarrow a) \rightarrow ((c \rightarrow (b \rightarrow a)) \rightarrow ((c \rightarrow b) \rightarrow (c \rightarrow a)))) & \\
 (c \rightarrow a) & \text{Sustitución en 1: } (c \rightarrow (b \rightarrow a)) \rightarrow ((c \rightarrow b) \rightarrow (c \rightarrow a)) / a; \\
 & b \rightarrow a / a \\
 ((b \rightarrow a) \rightarrow ((c \rightarrow (b \rightarrow a)) \rightarrow ((c \rightarrow b) \rightarrow (c \rightarrow a)))) & \text{MP entre 3 y 2}
 \end{array}$$

13 Cf. su discusión con Hilbert en Frege 1980.

En el siguiente apartado desarrollo, entonces, la tesis principal del trabajo. La estrategia será demarcar el problema que Frege encuentra en las demostraciones matemáticas localizando de este modo el surgimiento de su notación conceptual. Al decir de Frege, ella surge con el propósito de erradicar las lagunas en las cadenas de inferencias, frente al diagnóstico de que, hasta el momento, tales lagunas habían sido toleradas en virtud de la apelación al concepto de evidencia, cuya legitimidad Frege da por tierra.

II. La realización de la idea: el uso de la notación conceptual

En *Die Grundlagen der Arithmetik* (1884) [Gl.], tras una pormenorizada discusión con las principales escuelas matemáticas de la época, Frege ofrece una demostración informal de la tesis acerca de la aritmética que presentara en *Bs*. Allí Frege resume de la siguiente manera lo que hemos dicho sobre su distanciamiento de la noción clásica de demostración tal como fuera utilizada por los matemáticos normalmente:

Después de que la matemática se hubo alejado por un largo tiempo del tipo de rigor euclidiano, retorna a él y pretende sobrepasarlo. (...) en la matemática la mera convicción moral, apoyada en múltiples y eficaces aplicaciones, no es suficiente. *En muchos casos tenidos antes por evidentes de suyo, se requiere ahora de prueba.* (...) En todas partes aparece el afán de probar más rigurosamente, de trazar estrictamente los límites de validez y, para lograrlo, de aprehender con precisión los conceptos. (Frege 1884, §1, énfasis mío)¹⁴

De todos modos, insisto, la preocupación de Frege por ciertas falencias que observa en el quehacer de los matemáticos está presente en sus textos desde el comienzo. Y es la naturaleza de estas falencias la motivación principal de la construcción de su notación conceptual en tanto que lenguaje conspicuo que permita expresar todas las conexiones lógicas de los razonamientos de manera inequívoca. En efecto, en el “Prólogo” de *Bs*. (1879, pp.7–8) Frege dice:

Dividimos en dos clases todas las verdades que requieren una fundamentación; mientras que la prueba puramente lógica puede preceder a las unas, las otras deben apoyarse en hechos empíricos. (...) Mientras me sometí a la pregunta de a cuál de estas dos clases pertenecen los juicios matemáticos, debí ensayar *qué tan lejos se podría lle-*

14 „Nachdem die Mathematik sich eine Zeit lang von der euklidischen Strenge entfernt hatte, kehrt sie jetzt zu ihr zurück und strebt gar über sie hinaus. In der Arithmetik war schon infolge des indischen Ursprungs vieler ihrer Verfahrensweisen und Begriffe eine laxere Denkweise hergebracht als in der von den Griechen vornehmlich ausgebildeten Geometrie. (...) Doch hat die weitere Entwicklung immer deutlicher gelehrt, dass in der Mathematik eine bloß moralische Ueberzeugung, gestützt auf viele erfolgreiche Anwendungen, nicht genügt. Für Vieles wird jetzt ein Beweis gefordert, was früher für selbstverständlich galt. (...) So zeigt sich überall das Bestreben, streng zu beweisen, die Giltigkeitsgrenzen genau zu ziehen und, um dies zu können, die Begriffe scharf zu fassen.“ (Frege 1884, §1)

gar en la aritmética exclusivamente por medio de inferencias, apoyado sólo en las leyes del pensamiento que se elevan sobre todas las particularidades. (...) para que no pudiera introducirse inadvertidamente algo intuitivo, se debió llegar a suprimir toda laguna en la cadena de inferencias. Al procurar cumplir lo más rigurosamente posible con este requerimiento me encontré, junto a todas las dificultades que surgen de la expresión, un *obstáculo en la inadecuación del lenguaje*. (...) *De estas necesidades nació la idea de la presente conceptografía*. Por lo pronto, ésta debe servir para probar de la manera más segura la precisión de una cadena de inferencias y para denunciar toda proposición que quisiera colarse inadvertidamente. (énfasis mío)¹⁵

Frege comparte un clima de época, y él mismo es conciente de ello, al juzgar al menos por su *Introducción* a *Die Grundlagen* (cf. el §1 de Frege 1884 ya citado). Pero su interés por la lógica no surge a raíz del desarrollo que adquiere en la segunda mitad del siglo XIX la “nueva lógica”¹⁶ en Gran Bretaña. Siguiendo a Sluga (1987, p. 81), al tomar contacto con el álgebra booleana, posiblemente a través del *Operationskreis* de Schröder (1877), Frege debe haber percibido de inmediato las diferencias que separaban su proyecto de la propuesta de asimilar funciones lógicas a operaciones algebraicas. Peckhaus (1994, p. 321) sintetiza el proyecto de Boole, de sus sucesores e incluso, hasta cierto punto, de Schröder¹⁷ en sus primeros trabajos, diciendo que dicha escuela estaba primariamente interesada en una reforma a través de métodos exactos, *i. e.*, matemáticos, de la lógica en tanto que disciplina filosófica. Caso contrario es el de quienes estaban interesados primariamente en programas de fundamentación de la matemática, que se embarcaron *consecuentemente* en construcciones de aparatos lógicos que les sirvieran de instrumento para tales programas. Tal es el caso de Frege, cuyo interés por la lógica era secundario, al menos al momento de abocarse a la construcción de su nuevo lenguaje de fórmulas, no obstante la magnitud de sus descubri-

15 „Wir theilen danach alle Wahrheiten, die einer Begründung bedürfen, in zwei Arten, indem der Beweis bei den einen rein logisch vorgehen kann, bei den andern sich auf Erfahrungsthatfachen stützen muss. (...) Indem ich mir nun die Frage vorlegte, zu welcher dieser beiden Arten die arithmetischen Urtheile gehörten, musste ich zunächst versuchen, wie weit man in der Arithmetik durch Schlüsse allein gelangen könnte, nur gestützt auf die Gesetze des Denkens, die über allen Besonderheiten erhaben sind. (...) Damit sich hierbei nicht unbemerkt etwas Anschauliches eindringen könnte, musste Alles auf die Lückenlosigkeit der Schlusskette ankommen. Indem ich diese Forderung auf das strengste zu erfüllen trachtete, fand ich ein Hindernis in der Unzulänglichkeit der Sprache (...). Aus diesem Bedürfnisse ging der Gedanke der vorliegenden Begriffsschrift hervor. Sie soll also zunächst dazu dienen, die Bündigkeit einer Schlusskette auf die sicherste Weise zu prüfen und jede Voraussetzung, die sich unbemerkt einschleichen will, anzuzeigen.“ (Frege 1879, pp. IX–X)

16 En relación al surgimiento de “la nueva lógica”, “lógica matemática” o “lógica simbólica” cf. Peckhaus 1997, especialmente la *Introducción*, y Peckhaus 1999, en donde, en particular, se tematizan las distintas motivaciones que impulsaron el desarrollo de esta disciplina.

17 Para una justa evaluación del caso de Schröder, cuya obra temprana se inscribe claramente en la escuela algebrista, produciéndose un corrimiento con interesantes matices hacia los problemas de fundamentación en su obra posterior, cf. Peckhaus 2004. Cf. Legris 2012 para un contrapunto cuidadoso entre Schröder y Frege en cuanto a los propósitos y programas de cada uno.

mientos. De hecho, Frege señala en unas reflexiones tardías (Frege 1969, p. 273) que aquello que lo condujo de la matemática a la lógica fue el descubrimiento de que los enunciados numéricos podían ser analizados como enunciados sobre *conceptos*. Este descubrimiento fue, en gran parte, el responsable de la consideración del problema de la fundamentación de la matemática como un problema eminentemente filosófico (cf. autor).

II.1. La justificación de la conceptografía

La notación conceptual surge, entonces, de la necesidad de volver más rigurosas las demostraciones matemáticas. El diagnóstico respecto de las falencias que Frege encuentra en ellas es que el lenguaje de la aritmética carece de expresiones para las conexiones lógicas. De allí que el matemático recurre en tales ocasiones al lenguaje natural, pero en el lenguaje natural “las formas en que se expresan los argumentos son tan variadas, tan laxas y tan dúctiles, que fácilmente se pueden colar presupuestos inadvertidos”, tal como Frege afirma en “Sobre la justificación científica de una conceptografía” (Frege 1882, p. 210)¹⁸. En este texto, escrito a raíz de las objeciones de Schröder (1880) a su notación conceptual, Frege se propone justificar su invención argumentando que la ventaja de un lenguaje construido *ad hoc* es que se pueden eliminar aquellos aspectos del lenguaje natural que lo hacen inepto a los fines de una demostración rigurosa. Para explicar este punto Frege esboza una auténtica teoría del símbolo que no podemos presentar acá más que en los aspectos relevantes a nuestro tema.

Frege comienza con una defensa de la utilidad de los símbolos en tanto esencial a nuestra capacidad representativa:

[nuestro curso de representaciones] se limitaría a lo que formara nuestra mano, a lo que pudiera entonar nuestra voz, si no fuera por la invención de los símbolos que nos hacen presente lo ausente, lo invisible y, tal vez, lo insensible. (Frege, 1882, p. 209)¹⁹

Su estrategia será a partir de ahora distinguir entre dos tipos de símbolos, los audibles y los visibles, en función de la capacidad que ellos tengan para significar lo pretendido. Así, un símbolo escrito está en mejores condiciones de lograrlo dado que es más duradero e invariable que uno audible. Aunque, por otra parte, la inestabilidad del lenguaje natural –por cierto, condición de su versatilidad y constante desarrollo– ocasiona al símbolo escrito a menudo

18 „die Formen, in denen das Folgern ausgedrückt wird, [sind] so vielfältige, so lose und dehnbare, dass sich leicht Voraussetzungen unbemerkt durchschleichen können“ (Frege 1882, p. 108)

19 „[unser Vorstellungsverlauf] würde aus das beschränkt sein, was unsere Hand gestalten, unsere Stimme zu tönen vermag, ohne die grosse Erfindung der Zeichen, die uns gegenwärtig machen, was abwesend, unsichtbar, vielleicht unsinnlich ist.“ (Frege 1882, p. 107)

Es interesante destacar la enumeración que hace Frege en esta cita, en particular, la mención a lo insensible y la capacidad del símbolo de hacerlo presente. Aquí se revela el realismo tan característico de su ontología a propósito del espinoso problema del significado de los términos abstractos.

dificultades para una acuñación precisa de lo designado. Lo ideal es entonces un signo escrito que no participe del lenguaje histórico sino de uno cuidadosamente regimentado.

Además de la durabilidad, la otra característica del lenguaje escrito que interesa a Frege es su disposición espacial bidimensional que “ofrece la posibilidad de hacer presentes muchas cosas al mismo tiempo” [„die Möglichkeit anbietet, viele Sachen gleichzeitig anwesend zu machen”], aspecto que el lenguaje aritmético aprovecha en grado máximo:

El lenguaje de fórmulas aritmético es una conceptografía, puesto que sin mediación de la voz expresa inmediatamente las cosas. (...) Si de dos [contenidos] se sigue un tercero, se separa al tercero de los dos primeros por una barra horizontal que se puede traducir por “por lo tanto”. De esta manera se utiliza la superficie bidimensional donde se escribe para ganar claridad. (Frege 1882, p. 213)²⁰

Este uso de la bidimensionalidad, junto con el uso de letras para expresar generalidad, son las características que Frege adoptará del lenguaje de la aritmética para su conceptografía, habida cuenta de las falencias que dicho lenguaje tiene.

Puntualizando, la falencia fundamental que Frege observa en las demostraciones matemáticas es que la justificación de aquellas inferencias que no sean por reemplazo de equivalentes se lleva a cabo mediante el lenguaje natural. Pero el lenguaje natural permite que se cuelen inadvertidamente elementos intuitivos y esto no puede satisfacer a Frege pues es contrario a su tesis logicista, según la cual las proposiciones de la aritmética pueden probarse en términos puramente lógicos. Como dijimos, el rechazo de elementos intuitivos en una justificación implica ya de por sí un alejamiento de la noción de demostración clásica, dado que en ella no existe un énfasis tal en la naturaleza de las razones que se aduzcan a favor de una tesis siempre y cuando sean éstas suficientemente convincentes. En particular, a Frege le preocupa demostrar que la inducción matemática es una forma de inferencia puramente lógica, o sea, que la noción u operación de “siguiente” puede definirse a través de conceptos lógicos, sin ninguna necesidad de acudir a ninguna forma de intuición. Nuevamente:

[La deducción en aritmética] casi siempre descansa en que transformaciones iguales realizadas con números iguales conducen a resultados iguales. Ciertamente no es ésta la única manera de inferir en la aritmética. Pero si el progreso lógico acontece de otra manera, por lo general será necesario expresarlo por medio de palabras. Por lo tanto,

20 „Die arithmetische Formelsprache ist eine Begriffsschrift, da sie ohne Vermittelung des Lautes unmittelbar die Sache ausdrückt. (...) Solche Inhalte –hier Gleichungen oder Ungleichungen– werden so, wie sie aus einander folgen, unter einander geschrieben. Wenn aus zweien ein dritter folgt, trennt man den dritten durch einen horizontalen Strich, der mit „folglich“ übersetzt werden kann, von den beiden ersten. In dieser Weise wird die zweifache Ausdehnung der Schreibfläche für die Uebersichtlichkeit verworhet.” (Frege 1882, p. 112)

en el lenguaje de fórmulas aritmético faltan expresiones para las conexiones lógicas (...)
*Todo lo contrario pasa con el modo de simbolización que proviene de Leibniz, para las relaciones lógicas, que Boole, R. Grassman, Stanley Jevons, E. Schröder y otros han renovado recientemente. Sin duda se tienen aquí las formas lógicas, si bien no cabalmente completas; pero falta el contenido. (Frege 1882, p. 213, énfasis mío)*²¹

La controversia con los algebristas está lejos de ser meramente formal, sino que atañe básicamente a la concepción subyacente del lenguaje en el cual debía formalizarse la lógica, incluso más, a los objetivos y alcance supuestos de la lógica misma. Tal es así que en su influyente y breve artículo de 1967 van Heijenoort ha creído ver en este punto el origen de dos tradiciones contrapuestas en los orígenes de la lógica simbólica²². En el caso de los algebristas el lenguaje simbólico de la lógica debía ser tal que permitiese a través de un cálculo la resolución de problemas lógicos. Para Frege, en cambio, el lenguaje simbólico de la lógica debía ser un lenguaje universal, es decir, un sustituto del lenguaje natural en su función judicativa que permitiera expresar de manera conspicua cuerpos enteros de conocimiento.

21 „[Das Folgern] beruht fast immer darauf, dass gleiche Veränderungen mit gleichen Zahlen vorgenommen auf gleiche Ergebnisse führen. Dies ist nun freilich durchaus nicht die einzige Weise des Schliessens in der Arithmetik. Aber, wenn der logische Fortgang anders geschieht, wird es meistens nöthig sein, ihn durch Worte auszudrücken. Es fehlen demnach der arithmetischen Formelsprache Ausdrücke für logische Verknüpfungen (...). Gerade umgekehrt ist es bei der von Leibniz herrührenden Bezeichnungsweise logischer Beziehungen, die in neuerer Zeit von Boole, R. Grassmann, St. Jevons, E. Schröder und Andern erneuert ist. Hier hat man zwar die logischen Formen obwohl nicht ganz vollständig; es fehlt aber der Inhalt.“ (Frege 1882, p. 112)

Por cierto, la tercera parte de *Bs* es un intento de mostrar que la inducción matemática es puramente lógica (cf. autor)

22 Este texto seminal ha sido objeto de numerosas revisiones críticas, las más contundentes, sostenidas en la acusación de cierta superficialidad con que el autor habría tratado la tradición algebrista. Para una revisión sintética de la distinción de van Heijenoort también expuesta en van Heijenoort 1967 cf. Peckhaus 2004 donde, en particular, se rebate la tesis de van Heijenoort según la cual la posibilidad de cuantificar es el criterio que permite distinguir entre las dos tradiciones.

Sluga 1987, p. 81, por su parte, si bien reconoce el impacto filosófico e historiográfico del famoso artículo pretende “extender y ajustar las intuiciones de van Heijenoort” a propósito de que van Heijenoort no habría conocido “Boole’s Calculating Logic and the Begriffsschrift” cuando publicó su artículo en 1967 (*ibid.*, p. 97, nota 14). Publicado póstumamente, Frege 1882 es, en esencia, una defensa de la conceptografía frente a las críticas que recibiera de Schröder, quien gozaba ya de una sólida posición como Profesor de Matemática en la Technikal Universität de Karlsruhe. Allí resulta claro que la controversia no debe centrarse en la distinción cálculo – lenguaje universal, tal como posteriormente hiciera van Heijenoort. Frege aspira, de hecho, a construir un cálculo –enmarcado en un lenguaje apto para la expresión de leyes universales. Asimismo, Schröder concibe a su lógica como una *lingua characterica*. Más bien la controversia se halla, tal la tesis clave de Sluga 1987, en la cuestión acerca de si los juicios o sus elementos constitutivos, *i. e.*, los conceptos, debían tener prioridad filosófica, epistemológica o lógica, o viceversa. Apoyado en el principio de prioridad del juicio sobre los conceptos Frege introduce una metodología completamente nueva para la formación de conceptos. Esto le permitirá introducir conceptos aritméticos sobre la base de conceptos lógicos a través del método de definición por análisis, método que se basa en los diferentes análisis posibles del contenido judicable de un juicio. Cf. Legris 2008, pp. 148–150.

Fiel en este sentido al ideal leibniziano de construcción de una *lingua universalis*²³, Frege reconoce que su sistema ha sido construido con el objetivo inmediato de poder expresar, en particular, las proposiciones de la aritmética, pero que podría ser útil para cualquier otra disciplina científica. De allí que, al igual que en el ideal leibniziano, su sistema *contenga* un cálculo tal que permita que los teoremas conocidos de la aritmética se deduzcan de las leyes fundamentales del pensamiento (los axiomas) sin apelación alguna a la intuición sino por mera manipulación sintáctica.

II. 2. La conceptografía: un lenguaje de fórmulas construido a la manera del lenguaje de la aritmética.

Con el fin de evitar, entonces, que se cueilen elementos intuitivos, Frege busca que sus pruebas sean absolutamente rigurosas. Para ello, no solamente debe explicitarse todo lo que va a entrar en juego en las pruebas, sino que el significado de las expresiones a utilizar debe ser unívoco. *Ergo*, es necesario dejar a un lado el lenguaje natural, esencialmente multívoco, y ofrecer las pruebas en un lenguaje regimentado. Como, según Frege, los lenguajes artificiales disponibles en aquel momento no eran aptos para expresar un contenido, sino que eran absolutamente formales, Frege se propone la construcción de un nuevo lenguaje:

[la conceptografía] debe tener *modos de expresión simples para las relaciones lógicas*, que limitadas en número a lo necesario, se puedan dominar con facilidad y seguridad. Estas formas deben ser *apropiadas para combinarse lo más íntimamente posible con un contenido*. Por tanto, debe aspirar a una brevedad tal que la superficie bidimensional donde se escribe pueda ser bien aprovechada para la claridad de la exposición (Frege 1882, p. 214, énfasis mío)²⁴.

La conceptografía es este lenguaje: un lenguaje formal para el pensamiento puro, construido a la manera (del lenguaje de) la aritmética [*“eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens”*], tal el subtítulo de *Begriffsschrift*, cuyo significado Frege cree oportuno desplegar, parte a parte, en el *Prólogo*. Allí leemos que es un lenguaje cuyas fórmulas son juicios tales que en ellos “se renuncia a expresar todo aquello que carezca de

23 Frege se refiere al programa leibniziano de construcción de una *lingua characterica*, expresión que estrictamente habría tomado de Trendelenburg (*‘lingua characterica universalis’*). Para la influencia de Trendelenburg en los orígenes de la lógica moderna cf. Peckhaus 1997, pp. 178–181.

24 „[eine wahre Begriffsschrift] muss für die logischen Beziehungen einfache Ausdrucksweisen haben, die an Zahl auf das Notwendige beschränkt, leicht und sicher zu beherrschen sind. Diese Formen müssen geeignet sein, sich mit einem Inhalte auf das Innigste zu verbinden. Dabei muss solche Kürze erstrebt werden, dass die zweifache Ausdehnung der Schreibfläche für die Uebersichtlichkeit der Darstellung gut ausgenutzt werden kann.“ (Frege 1882, p. 113)

significado para la *secuencia de inferencias*” (Frege 1879, p. 8 énfasis del autor)²⁵. Se designa a lo resultante *contenido conceptual* [*begrifflicher Inhalt*] o *contenido judicable* [*beurteilbarer Inhalt*] (§§2-3), de donde toma el lenguaje el nombre de notación *conceptual*. Se pretende que tales fórmulas expresen “relaciones independientes de las propiedades específicas de las cosas” (Frege 1879, p. 8) [„Beziehungen (...), die von der besonderen Beschaffenheit der Dinge unabhängig sind” (Frege 1879, X)] y así sean aptas “para el pensamiento puro”. La semejanza con el lenguaje de la aritmética ya ha sido reseñada y consiste en el aprovechamiento de la bidimensionalidad y en el uso de letras para expresar generalidad. Bastaría con agregar que Frege pone algún énfasis en esto último. De hecho, en este mismo *Prólogo* dice: “el más inmediato contacto de mi lenguaje de fórmulas con el de la aritmética consiste en el modo de utilizar las letras”²⁶.

Resumiendo, en la construcción de la conceptografía se persigue un doble propósito:

- i) sus fórmulas deben ser tales que expresen el contenido conceptual de una proposición y sólo eso, o sea, aquel contenido significativo relevante en las inferencias;
- ii) la notación “debe tener modos de expresión simples para las relaciones lógicas” (Frege 1882, p. 214)²⁷.

Con el listado de símbolos que han de usarse para construir las fórmulas del lenguaje comienza la tarea propiamente dicha de construcción del lenguaje artificial, no sin antes aclarar que, a la manera de la “teoría general de las magnitudes” [„allgemeinen Grössenlehre”], los símbolos empleados se pueden dividir en dos tipos: las variables y las constantes. Respecto de las variables, Frege se refiere a ellas como “letras” [„Buchstaben”] y señala de ellas dos características: que no tienen un significado determinado y que es esta indeterminación la que permite expresar la generalidad. El resto de esta parte “I. Definición de los símbolos” [„I. Erklärung der Beziehungen”] está dedicada a definir los símbolos de significado determinado y, junto con ello, a dar las reglas para su correcta utilización.

Por lo pronto, el primer símbolo que Frege presenta es $\vdash$, símbolo que expresa juicio o aserción: “Un juicio se expresará por medio del símbolo $\vdash$, colocado a la izquierda de los símbolos o combinaciones de símbolos que indican el contenido del juicio” (§ 2). A propósito de este símbolo haré de inmediato aclaración. Frege continúa diciendo: “Si se omite la pequeña barra vertical en el extremo izquierdo de la horizontal, esto transforma el juicio en una *mera combinación de ideas* acerca de la cual no expresa, quien la escribe, si reconoce

25 „auf den Ausdruck alles dessen verzichtet worden [ist], was für die *Schlussfolge* ohne Bedeutung ist” (Bs, p. X, énfasis del autor).

26 „am unmittelbarsten berührt sich meine Formelsprache mit der arithmetischen in der Verwendungsweise der Buchstaben”. (Bs, p. X)

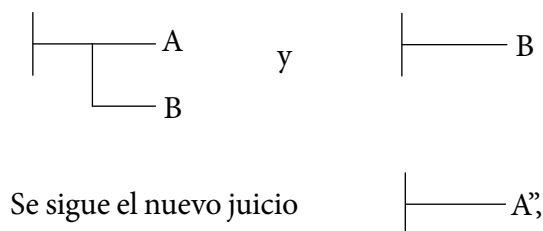
27 „[die Begriffsschrift] muss für die logischen Beziehungen einfache Ausdrucksweisen haben” (Frege 1882, p. 113).

o no la verdad en ella. (...) A la barra horizontal se le puede llamar *barra del contenido*; a la vertical, *barra del juicio*” (énfasis del autor). O sea, lo que fuera presentado como uno de los símbolos primarios del sistema, es en rigor un símbolo compuesto, con la peculiaridad de que la barra del juicio, siempre que se presente, irá acompañada de y sólo de la barra de contenido, mientras que ésta puede presentarse sin la barra de juicio así como en combinación con las otras funciones del sistema²⁸.

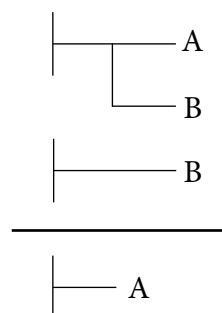
En los siguientes párrafos Frege presenta el símbolo para la condicionalidad, para la negación, para la igualdad de contenido, para expresar la funcionalidad (estrictamente, no hay para ello un símbolo sino ciertas reglas respecto de distintos tipos de letras) y para la generalidad.

La pregunta que se nos abre ahora es cuáles son las “relaciones lógicas” [„logischen Beziehungen”] que Frege ha tematizado en la *Conceptografía*., mencionadas también como “conexiones lógicas” [„logische Verknüpfungen”] en Frege 1882, p. 213.

Según el texto recién citado, “en el lenguaje aritmético faltan expresiones para estas conexiones lógicas” (Frege 1882, p. 213), por lo que resulta necesario expresar el proceso lógico por medio de palabras. En el §6 de *Begriffsschrift* Frege afirma que “de la definición dada en el §5 [la condicionalidad], resulta que de los dos juicios:

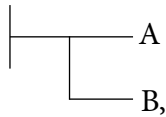


Lo que da lugar al *modus ponens* como modo de inferencia, que en Frege adquiere la siguiente forma:

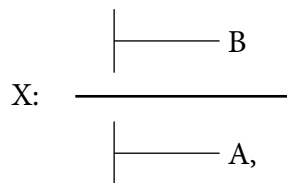


28 Dada la evolución de las ideas fregeanas a propósito de la consecución del programa logicista, esta barra de contenido recibe en *Gg.* una interpretación marcadamente diferente (cf. para ello Simons 1996). Acerca del papel de esta función (“la horizontal”) en la emergencia de la paradoja de Russell, cf. Thiel 1996, esp. pp. 260 y s. Asimismo puede leerse allí una apretada síntesis acerca de las distintas posibilidades de enmendar el sistema que exceden el mero reemplazo del problemático Axioma V. En cuanto a la barra de juicio, Greimann 2000 discute la interpretación canónica de este signo en tanto representante en el sistema del papel ilocucionario de las oraciones en el lenguaje natural.

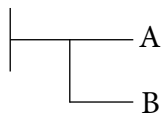
Para evitar repeticiones, a los juicios que aparecen por primera vez en el contexto de una prueba se les va asignando números sucesivos. Por ejemplo, dice Frege, sea X el número correspondiente a un juicio del tipo



entonces se puede escribir la inferencia anterior del siguiente modo

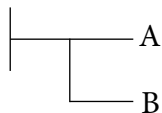


de manera tal que se deja al lector componer el juicio



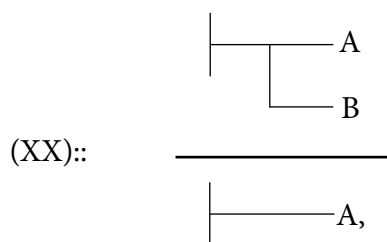
a partir de $\vdash B$ y $\vdash A$ y ver si está acorde con el juicio X.

Por cierto, ¿qué significa “de manera tal que se deja al lector componer el juicio



a partir de $\vdash B$ y $\vdash A$ y ver si está acorde con el juicio X”.

En mi opinión, Frege pretende explicar, de manera un tanto críptica, que para pasar de un enunciado B a otro A alcanza con tener un enunciado que tenga a B como antecedente y a A como consecuente (lo que hoy conocemos por teorema o metateorema de la deducción). Es decir, la premisa que está elidida es este condicional. Esta interpretación se apoya en la explicación que da Frege de “:.”. Ahora la inferencia es



donde XX es $\vdash B$ y los dobles puntos indican que $\vdash B$ “se debe construir de una manera distinta a la anterior”. Lo elidido ya no es un enunciado condicional cuyo antecedente es lo que figura como premisa y cuyo consecuente como conclusión, sino que se corresponde con el antecedente de la premisa mencionada explícitamente. Es decir, tengo un enunciado condicional, si puedo afirmar el antecedente de manera independiente, puedo concluir el consecuente. Dicho de otra manera, dado un condicional y el *modus ponens* como regla de inferencia, para concluir el consecuente de tal condicional sólo hace falta tener el antecedente, que en nuestro caso es lo indicado por XX .

Retomando, entonces, queda claro que por *relaciones* o *conexiones lógicas* debemos entender lo que hacia el final del §6 de *Begriffsschrift* nombra como *modos de inferencia* [„Schlussweisen”]. Allí leemos:

Con Aristóteles podemos enumerar en lógica una serie completa de modos de inferencia; yo sólo me sirvo de éste [el *modus ponens*]. (...) Con esta limitación a un solo modo de inferencia, sin embargo, en manera alguna se quiere expresar una proposición psicológica, sino únicamente resolver una cuestión de forma de la manera más expedita (el énfasis es del autor)²⁹.

(¡Permítaseme destacar esta cita a propósito de la tesis general de mi trabajo en relación a la evolución de la idea de demostración de Frege a partir de la idea clásica aristotélica!)

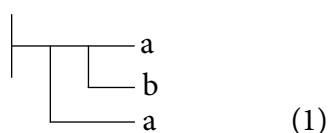
En la primera parte de la *Bs.* se presenta, entonces, el sistema simbólico de su lenguaje. Se ha señalado ya muchas veces que, pese a los cuidados de Frege y comparado con las mejores presentaciones contemporáneas, la presentación fregeana adolece de ambigüedades en relación al lenguaje objeto y al metalenguaje, a la vez que no explicita todas las reglas de inferencia utilizadas sino únicamente el *modus ponens*. Pese que en sus comentarios acerca de los modos inferenciales de la aritmética menciona la sustitución de equivalentes, no menciona esta regla de modo explícito para su sistema, cuyas “leyes” son estrictamente esquemas de leyes. Asimismo, tampoco menciona explícitamente las reglas involucradas en la cuantificación, sino que ellas aparecen cuando Frege explica las posibilidades del uso de los distintos tipos de variables (cf. §§2–11). Con la segunda parte “II. Representación y deducción de algunos juicios del pensamiento puro” [„II. Darstellung und Ableitung einiger Urteile des reinen Denkens”] se completa la presentación del lenguaje. En el §13 Frege aclara que los principios fundamentales del pensamiento no pueden ser expresados en la conceptografía porque están en su base. Se trata de las reglas para el buen uso de los signos (en donde, a la par, se dice qué significados se está pretendiendo capturar) y las reglas de

29 „In der Logik zählt man nach Aristoteles eine ganze Reihe von Schlussarten auf; ich bediene mich nur dieser einer [*modus ponens*]. (...)Es soll mit dieser Beschränkung auf eine einzige Schlussweise jedoch keineswegs ein psychologischer Satz ausgesprochen werden, sondern nur eine Formfrage im Sinne der grössten Zweckmässigkeit entschieden werden“ (*Bs.*, §6, énfasis del autor).

inferencia que presentó en la primera sección. O sea, se debió recurrir al lenguaje natural para explicar cómo funcionan los símbolos, y en particular, para dar cuenta del significado de los símbolos de juicio y de función.

Sobre esta base y las reglas de buena formación podrán expresarse algunos otros juicios del pensamiento puro, *i.e.*, los tres axiomas que conciernen a la barra de condición, los tres que introducen la noción de negación, los dos correspondientes a la identidad de contenido y el que concierne a la generalidad (específicamente, a la concavidad en la barra de contenido). Son estos nueve juicios los que Frege ha elegido para que conformen la base axiomática de su sistema deductivo, consciente de que queda abierta la posibilidad de que otras elecciones sean igualmente (o incluso más) razonables. Retomamos esto en nuestra *Conclusión*. Sería parte de otra investigación determinar las motivaciones específicas de esta elección. Por el momento nos limitamos a conjeturar que Frege se encuentra en un equilibrio inestable entre un principio científico de economía e intuiciones básicas acerca de la naturaleza de la lógica.

Hasta aquí, los medios mediante los cuales Frege aspira erradicar de las pruebas formales la noción de evidencia, tan cara a la filosofía como también a la matemática. La notación que Frege ha ideado tiene las ventajas que él reclama: asegurar la corrección y transparencia de una deducción; en particular, la de facilitar las inferencias a través del *modus ponens*. Pero al costo de un gran despliegue expositivo. En aras de no apelar a la evidencia se sacrifica un aspecto epistemológico de las demostraciones de enorme importancia para la noción clásica de demostración: la pretendida “abarcabilidad” de la prueba. Esto resulta patente desde el inicio mismo de la puesta en práctica del sistema. De las dos primeras leyes, ofrecidas en el § 14, concernientes sólo al condicional:



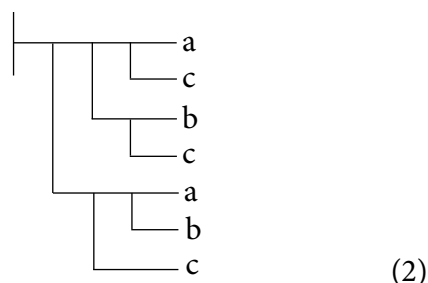
Frege deriva en el § 15 una tercera, la primera demostración (y la más simple) de la *Conceptografía*.

No hace falta avanzar más para observar el uso particular que hace Frege de la bidimensionalidad de un lenguaje escrito, por lo pronto, en relación con el propósito de que en la nueva notación las fórmulas deben ser aptas para expresar un contenido. Frege se las ha ingeniado para que los contenidos de todas las fórmulas que participan de las pruebas queden a la derecha, mientras que las relaciones lógicas entre dichos contenidos están representadas por grafos a la izquierda de estos³⁰. En este primer caso, en ausencia de la

30 En esta presunta facilidad para capturar visualmente las conexiones lógicas entre los contenidos se basa Macbeth 2005 para sostener una interpretación diagramática de la conceptografía en contra de lo que el propio autor sostiene.

negación y del problema del alcance del cuantificador universal: líneas rectas para expresar dependencia lógica, que de cualquier modo serán siempre las predominantes.

A modo de ejemplo y a propósito del contenido, Frege propone el siguiente “diccionario”:

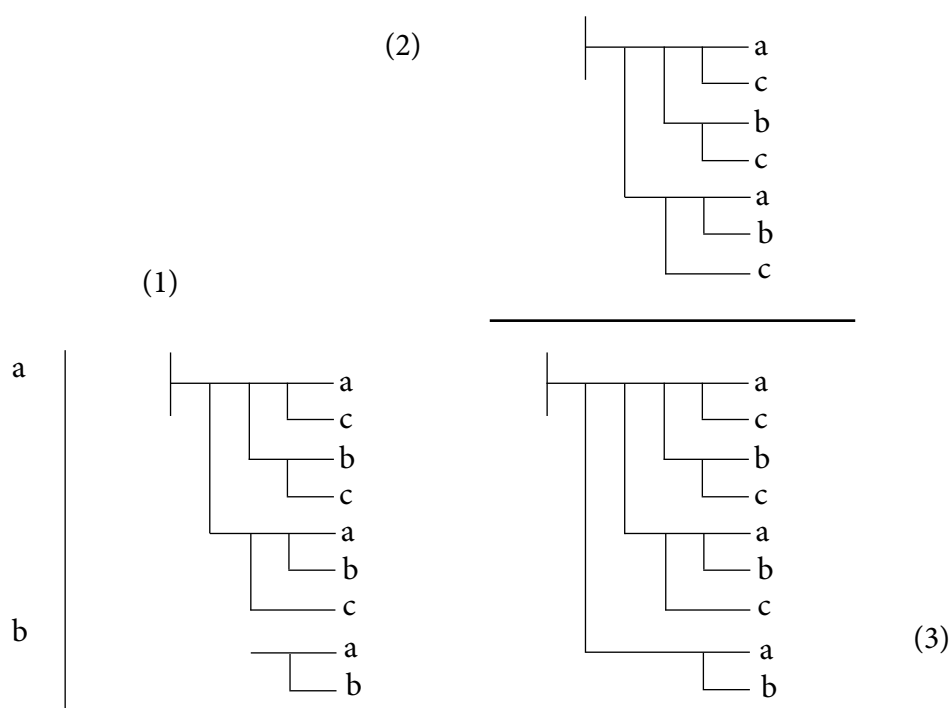


c: en la serie numérica Z cada término sucesor es mayor que el predecesor;

b: el término M es mayor que L;

a: el término N es mayor que L.

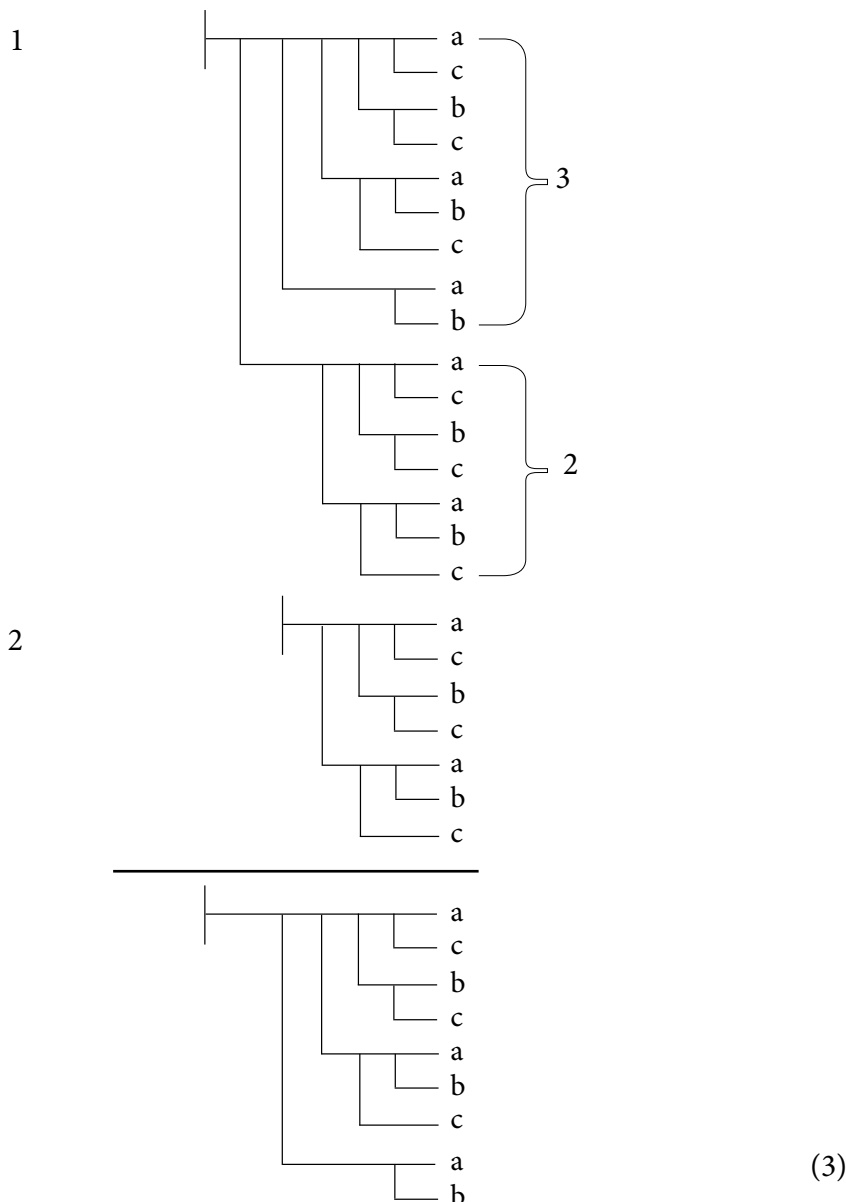
La ley fundamental (2), que utilizando una simbología más económica escribimos $((c \rightarrow (b \rightarrow a)) \rightarrow (c \rightarrow b)) \rightarrow (c \rightarrow a)$, ha de instanciarse por tanto:



Si de las proposiciones de que en una serie numérica Z cada término sucesor es mayor que el predecesor y de que el término M es mayor que L, se puede inferir que el término N es mayor que L $[c \rightarrow (b \rightarrow a)]$,

y si de las proposiciones de que en la serie numérica Z, cada término sucesor es mayor que el predecesor, se sigue que M es mayor que L [$c \rightarrow b$],
 entonces la proposición de que N es mayor que L se puede inferir de la proposición de que cada término sucesor en la serie numérica es mayor que el predecesor [$c \rightarrow a$].

Hemos señalado ya que la presentación de la Bs. adolece de imprecisiones, en particular, conflagrando la presentación de su vocabulario con sus modos de inferencia. Esta confusión también aparece en los ejemplos. En el actual debe tenerse cuidado de no confundir la expresión condicional “Si de las proposiciones de que (...) y de que (...), se puede inferir que (...), y si de las proposiciones de que (...). se sigue que (...)” con “entonces”. Según la formalización ofrecida, toda la primera parte es un gran condicional con condicionales anidados y recién luego de “entonces” se nos presenta la conclusión, también, condicional. Pero avancemos con nuestro objetivo de mostrar el problema de abarcabilidad que tiene la Bs. Siendo la ley fundamental (1) ($a \rightarrow (b \rightarrow a)$), la demostración más simple de la *Conceptografía*, entonces, tiene la siguiente forma:



En el §6 se explicó que la inferencia se hace pasando de (2) y (1) a (3). Según dicha explicación “(1):” significa que debe reponerse en la inferencia una premisa que afirme un condicional con (2) como antecedente y (3) como consecuente, a saber: Frege pretende limitar, por razones teóricas y de economía en cuanto a los presupuestos, los modos de inferencia al *modus ponens*. Pero, como dijimos, Frege usa además la regla de sustitución de equivalentes. Asimismo, dos observaciones acerca del uso de los distintos tipos de variables que Frege ofrece en su vocabulario (reemplazo de letras itálicas por letras góticas junto con el cuantificador universal) implican también la presencia de otras dos reglas de inferencia respectivamente. Aún así, dado que bien podemos pasar por alto estas falencias en virtud de la magnitud del proyecto, en particular a propósito de erradicar la apelación a la evidencia intuitiva en las demostraciones, queda claro que Frege es fiel a su objetivo de hacer explícito lo implícito. En ello consiste el tan mentado *conocimiento* que aportan las demostraciones deductivas³¹. Este mismo interés revisten las definiciones analíticas no triviales³².

La defensa de esta tesis es central para entender la relevancia epistemológica del proyecto logicista, que se propone probar que las oraciones de la aritmética son analíticas. En este sentido, se puede trazar una distinción entre el papel que cumplen las definiciones en matemática y en filosofía. Por un lado, en matemática se parte de definiciones (analíticas) y ellas “se prueban por su fecundidad” [„bewähren sich durch ihre Fruchtbarkeit”] (Frege 1884, § 70). En *Gl.*, por ejemplo, una vez dada la definición de “número que corresponde al concepto *F*” la tarea es ver “si las conocidas propiedades de los números se derivan de [ella]” [„ob sich bekannte Eigenschaften der Zahlen aus unserer Erklärung der Anzahl, welche dem Begriff *F* zukommt, ableiten lassen”] (*Gl.*, § 70). Por otro lado, si de *Gl.* se dice que es el trabajo fregeano más filosófico (cf. Dummett 1990, pp. 1–2) es, en buena medida, por el método aplicado para llegar a tal definición de número. El método consiste en un análisis crítico tanto de las distintas nociones de número que manejaban las diferentes escuelas de la época, como del uso en el lenguaje natural de los términos numéricos.

III. Conclusión

Hemos pretendido mostrar que el proyecto logicista descansa sobre una idea clásica de demostración según la cual las demostraciones son *herramientas* para la obtención, o mejor, para la ampliación del conocimiento. En el caso del conocimiento lógico, es imprescindible hallar definiciones analíticas que estén en la base de las demostraciones. Ello, unido a modos de inferencia claramente explicitados, garantiza la analiticidad de los enunciados que puedan derivarse. Como contrapartida tenemos que la ampliación del conocimiento proviene

31 Tal la tesis, a grandes rasgos, que sostiene Brandom 1994 al abordar el problema más general, caro a la filosofía del lenguaje, acerca de la elucidación de significados. A pesar de la diferencia de escala, creo que su respuesta vale también para nuestro caso. Debo este paralelo a Oscar Esquisabel.

32 Cf. Legris 2008, p. 145.

del análisis de los enunciados básicos, es decir de la posibilidad de reducir enunciados a enunciados lógicos últimos. De esta manera se logra mostrar las relaciones existentes entre las distintas verdades. Así, la construcción de sistemas formales de lógica tiene como objetivo tanto la obtención de todas las leyes lógicas (que son a su vez leyes del pensamiento puro), como la exposición de los nexos existentes entre ellas³³.

Frege señala que este ideal sólo puede ser logrado a través del método deductivo de presentación, puesto que no se alcanzará tal totalidad (inabarcable) de leyes formulables como no sea encontrando “aquéllas que, *por su fuerza*, contengan en sí a todas [las demás]” (§13) „die, *der Kraft nach* alle in sich schliessen” (§13, énfasis del autor). Pero acto seguido admite la posibilidad de que haya otra serie de juicios de los que se deduzca toda ley del pensar. En tal caso, si bien siempre pueden intentarse argumentos que esgriman razones de principio a favor de un sistema, en tanto haya otros posibles la arbitrariedad (y luego, la convencionalidad) aparece inmediatamente como amenaza. La definición en términos metafóricos de leyes que “por su fuerza contengan en sí a todas las demás” bien podría estar revelando que Frege es consciente de que su presentación puede habilitar una noción de demostración opuesta a la suya, o sea, una noción de demostración que solo exija validez formal. Frege pretende que sus axiomas sean de hecho “juicios del pensamiento puro”, verdades primeras e indemostrables, y que ello les daría esa suerte de “fuerza” o potencia de contener a todas las demás. Sin embargo, al admitir que podría haber otros sistemas, habilita una fundamentación pragmática en donde se diluye todo compromiso ontológico³⁴.

Sea como fuere, resulta que al observar con celo una concepción básicamente clásica de demostración, y apenas esbozado el primer intento de realizar la prueba pretendida, la noción clásica se ve modificada. Es la naturaleza de la tesis a demostrar, que exige que se erradique todo elemento intuitivo en la prueba, lo que pone condiciones extremas a la idea clásica de demostración. Si bien nunca se pierde el objetivo epistemológico original, sí se sacrifica la abarcabilidad de la demostración a favor de la pureza lógica (que es lo que garantiza universalidad). Nada debe provenir de la intuición, ni los principios fundamentales ni

33 En un texto tardío [1924/1925] „Erkenntnisquellen der Mathematik und der mathematischen Naturwissenschaften” (Frege 1969, pp. 286–294) Frege distingue tres [¿o tal vez cuatro?] fuentes de conocimiento Erkenntnisquellen:

- i. la percepción sensible [die Sinneswahrnehmung],
- ii. la fuente de conocimiento lógico [die logische Erkenntnisquelle],
- iii. la fuente de conocimiento geométrico [die geometrische Erkenntnisquelle] y la fuente de conocimiento temporal [die zeitliche Erkenntnisquelle].

La fuente de conocimiento lógico estaría, según Frege, en el origen de la posibilidad del análisis del lenguaje, a través de lo cual se pueden obtener definiciones fructíferas. Cf. Frege 1969, pp. 282–292.

34 En línea con el pragmatismo defendido por Brandom 1994, Frápolli 2025 defiende una consistente interpretación pragmatista de la propuesta fregeana. Por mi parte, en autor defiende la posibilidad de un programa de fundamentación de la matemática que doy en llamar “logicismo minimal” en el que confluyen tesis fregeanas con tesis constructivistas.

las formas de inferencia porque la evidencia ya no vale como fuente de justificación. Resulta que la sola realización (o despliegue) de la idea original conlleva su propia modificación³⁵.

35 He presentado resultados parciales de este trabajo a lo largo de los años, por primera vez en el *I Encuentro de Historia de la Matemática*, 2005, Villa María, Córdoba y más tarde en el *Kolloquium der Philosophie* (Institut für Humanwissenschaften de la Universidad de Paderborn) y en el *Colloquium logico-philosophicum* (*Institut für Philosophie* de la Universidad de Erlangen-Nürnberg). Recientemente, en la *Private Pädagogische Hochschule Burgenland*. Agradezco las observaciones del público en todas las ocasiones, en particular, las de Volker Peckhaus, Oscar Esquisabel, Pablo Lorenzano, Javier Legris, Michael Beaney, Alexander Zimmermann, Peter Bernhard y Christian Thiel. A Ignacio Angelelli, Alberto Moretti y Christian Thiel, tantas conversaciones sobre estos temas. A Hernán Pringe, la invitación a presentar algunas ideas en el marco del Grupo de Estudios Kantianos y a las editoras la invitación a integrar el presente volumen.

Referencias

- Aristóteles. 1984. *Prior Analytics. The Complete Works of Aristotle*. Barnes, J. (ed.). Princeton, N. J., Princeton U. P.
- Boole, George. 1979. *El análisis matemático de la lógica*, trad. E. Requena Manzano. Madrid, Cátedra. (1ra ed. 1847).
- Brandom, Robert. 1994. *Making it explicit*. Cambridge, Mass., Harvard U. P.
- Carter, Jessica, 2025, *Introducing the Philosophy of Mathematical Practice*, Cambridge U. P.
- Dummett, Michael. 1990. *Frege. Philosophy of Mathematics*. Cambridge, Mass., Harvard U. P.
- Frápolli, M. José, 2023. *The Priority of Propositions. A Pragmatist Philosophy of Logic*. Springer
- Frege, G. [1880/81] „Booles rechnende Logik und die Begriffsschrift“, en Frege 1969, pp. 9–52
- _____. 1882. “Sobre la justificación científica de una conceptografía”, en Frege 1972, pp. 209–214.
- _____. 1884. *Die Grundlagen der Arithmetik, eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*, ed. C. Thiel, Hamburgo, Felix Meiner, 1988.
- _____. [1924/1925] „Erkenntnisquellen der Mathematik und der mathematischen Naturwissenschaften“, en Frege 1969, pp. 286–294.
- _____. 1962. *Grundgesetze der Arithmetik, begriffsschriftlich abgeleitet*. Vol. I. Hildesheim, Georg Olms Verlagsbuchhandlung (1ra. ed. 1893).
- _____. 1964. *The Basic Laws of Arithmetic*, trad. M. Furth, Berkeley & Los Angeles, University of California Press, 1964.
- _____. 1969. *Nachgelassene Schriften*. ed. H. Hermes, F. Kambartel y F. Kaulbach. Comp. por G. Gabriel *et al.* Hamburgo, Felix Meiner.
- _____. 1972. *Conceptografía. Los fundamentos de la aritmética. Otros estudios filosóficos*, trad. H. Padilla. México, UNAM.
- _____. 1979. *Posthumous Writings*, trad. P. Long & R. White, Oxford, Blackwell.
- _____. 1980. *Philosophical and Mathematical Correspondence*, trad. H. Hall. Oxford, Blackwell.
- _____. 1990. *Kleine Schriften*, 2da. ed., comp. por I. Angelelli. Hildesheim-Zúrich-Nueva York, Georg Olms. (1ra. ed. 1967)

- Greimann, Dirk. 2000. "The Judgement-stroke as a Truth-operator: a New Interpretation of the Logical Form of Sentences in Frege's Scientific Language", *Erkenntnis* 52, pp. 213–238
- Jevons, W. Stanley. 1874. *Pure Logic or the Logic of Quality apart from Quantity with Remarks on Boole's System and the Relation of Logic and Mathematics*. E. Stanford, London, 1864; reimpresso en *Pure Logic and other Minor Works* (R. Adamson and H. A. Jevons, ed.), Macmilland ad Co., Londres/Nueva York, 1890; reimpresso Thoemmes Press, Bristol, 1991
- Kneale, William. & Kneale, Martha. 1962. *The Development of Logic*, Oxford UP.
- Legrís, Javier. 1994. "Ideas acerca de los conceptos de demostración y de verdad matemática", en *Análisis Filosófico*, XIV, vol. 2, pp. 149–59.
- _____. 1999. "Observaciones sobre el desarrollo de la teoría de la demostración y su relevancia para la filosofía de la lógica", en *Revista Patagónica de Filosofía*, I, pp. 115–32.
- _____. 2008. " "In Symbolen denken". Symbolic Knowledge in Frege's Conceptual Notation", en *Methodisches Denken im Kontext. Festschrift für Christian Thiel mit einem unveröffentlichten Brief Gottlob Freges*, (eds.) P. Bernhard & V. Peckhaus, Mentis, pp. 133–54
- _____. 2012. "Universale Sprache und Grundlagen der Mathematik bei Ernst Schröder", en *Mathematik – Logik – Philosophie. Ideen und ihre historischen Wechselwirkungen*, ed. G. Löffladt, Verlag Harri Deutsch, pp. 255–70
- Macbeth, D. 2005. *Frege's Logic*, Harvard U. P.
- Mancosu, P. 1996, *Philosophy of Mathematics and Mathematical Practice in the Seventeenth Century*, Oxford U. P.
- Marion M. 2010. "Between Saying and Doing: From Lorenzen to Brandom and Back", in P. E. Bour, M. Rebuschi & L. Rollet (eds.), *Construction. Festschrift for Gerhard Heinzmann*, London, College Publications, pp. 489–497
- Peckhaus, Volker. 1994. "Logic in transition: the Logical Calculi of Hilbert (1905) and Zermelo (1908)", *Logic and Philosophy of Science in Upsala*, D. Prawits y D. Westerståhl (eds.), Kluwer Academic Publishers, Holanda.
- _____. 1997. *Logik, Mathesis universalis und allgemeine Wissenschaft*. Berlín, Akademie Verlag.
- _____. 1999. "19th Century Logic between Philosophy and Mathematics", *The Bulletin of Symbolic Logic*, Vol. 5, n° 4, pp. 433–450.

- _____. 2004a. "Schröder's Logic". *Handbook of the History of Logic*, comp. D. M. Gabbay y J. Woods, vol. 3, pp. 557–609.
- _____. 2004b. "Calculus Ratiocinator vs. Characteristica Universalis? The Two Traditions in Logic, Revisited". *History and Philosophy of Logic* 25, 2004, pp. 3–14.
- Ross, W. D. 1958. "The Development of Aristotle's Thought" en Ross W. D., *Proceedings of the British Academy*, Volumen 43: 1957 (1958).
- Schirn, Matthias. 1996. (comp.) *Frege: Importance and Legacy*, de Gruyter, Berlin, New York.
- Schröder, Ernst. 1880b. „Rez. V. Frege 1879“. *Zeitschrift für Mathematik und Physik, Hist.-literarische Abt.* 25, pp. 81–94.
- _____. 1877. *Der Operationskreis der Logikkalkuls*. Leipzig, Teuber. Reedición: Darmstadt, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, 1966
- Simons, P. 1996. "The Horizontal". En Schirn 1996. pp. 280–300
- Sluga, Hans. 1987. "Frege Against the Booleans", *Notre Dame Journal of Formal Logic*, Vol. 28, n° 1, pp. 80–98
- Thiel, Christian. 1996. "On the Structure of Frege's System of Logic". En Schirn 1996, pp. 261–279.
- Thiel, C. 2016. "Quantor, indefinites", in J. Mittelstraß (ed.), *Enzyklopädie Philosophie und Wissenschaftstheorie*, 2nd ed., vol. 6, pp. 545f.
- Trendelenburg, A. 1867. „Über Leibnizens Entwurf einer allgemeinen Charakteristik“. *Historische Beiträge zur Philosophie*, vol. 3: *Vermischte Abhandlungen*, F. A. T. Berlin, Bethge, pp. 1–47.
- Van Heijenoort, Jean. 1967a. *From Frege to Gödel. A Source Book in Mathematical Logic 1879–1931*. Cambridge (Mass.), Harvard U.P.
- _____. 1967b "Logic as Calculus and Logic as Language". *Synthese*, Vol. 24, pp. 324–330. Reimpreso en van Heijenoort 1985, pp. 11–16.
- _____. 1985. *Selected Essays*. Naples, Bibliopolis.
- Vega, Luis. 1997. "Matemáticas y demostración: las vicisitudes actuales de una antigua *liaison*", en Garcíadiego, A., Rodríguez Consuegra, F., Vega, L., *El velo y la trenza: lazos entre lógica, matemática, historia y filosofía*, Colombia, Editorial Universidad Nacional.
- M. Wille, *Frege: Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*, Berlin/ Heidelberg, Springer, 2018

Zalta, E. 2023, "Frege's Logic, Theorem, and Foundations for Arithmetic" en *Stanford Encyclopedia of Philosophy* (1st ed. 2000). (ed. Fall 2025)

Notas

1. En línea con la práctica usual, con "Bs" me referiré a la obra de Frege y con "conceptografía" o "notación conceptual" al lenguaje allí propuesto.